Math. P.
224 t.
Hoffmann

18

Die Zahlen- und Raum-Lehre für die Realschulen des Herzogthums Nassau.

Erster Theil. Die Zahlenlehre;

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königlich-Baierischem Schulrathe, Director des Lyceums und der Gymnasial-Anstalt zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am königl. Lyceum, erstem Professor an dem königl. Forstinstitute, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, und der Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn.

Wiesbaden, 1821.
Gedruckt in der Enders'schen Buchdruckerey.

Mm. I. Immer

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede,

und

Uebersicht der Schrift.

Aufgefodert, die mathematischen Lehrbücher für die Realschulen des Herzogthums Nassau zu verfertigen, hat sich der Verfasser bemüht, dieselbe dem, durch das höchste Edict vom 24. März 1817, vorgezeichneten Lehrplane gemäß abzufassen. Ueber die Art der wirklichen Ausführung theilt er folgende Bemerkungen mit.

Die Elemente der Mathematik: die Zahlenlehre und die Raumlehre, können auf dreyfach verschiedene Weise gelehrt werden:

a) rein = theoretisch, nach dem strengen Systeme der Wissenschaft;

b) blos practisch, zur Benützung der mathematischen Resultate für bestimmte Anwendungen im menschlichen Leben;

c) theoretisch = practisch, zur Verbindung der scharfen Theorie mit einer fruchtbaren Praxis.

Die erste Lehrmethode eignet sich für sogenanntnte gelehrte Schulen, d. h. für Gymnasien, Lyceen und Universitäten, wo das Studium der Mathesis als geiststärkende Lehre getrieben, und weniger auf practische Anwendung gesehen wird.

Der zweyten Lehrart folgt man bey Zöglingen, welche sich lediglich zu Practikern irgend einer Kunst, eines Gewerbes und dergl. bilden wollen. So lernt Mancher z. B. ein Dreyeck auszumessen, ohne den Grund seines Verfahrens auch nur entfernt zu erkennen.

Bey der dritten Lehrweise werden Schüler vorausgesetzt, welche die mathematische Praxis zu ihrem künftigen Berufsgeschäfte bedürfen; aber um sich dieser Praxis mit Sicherheit zu bedienen, auch die nöthige Einsicht in die Gründe erhalten müssen. Diese Methode befriedigt den Geist und das practische Bedürfniß in gleichem Maase, und hält zwischen den beyden vorigen die Mitte.

Aus dem Geiste und Lehrplane der Realschulen ergibt sich's, daß die Elemente der Zahlen- und Raumlehre dieser dritten (theoretisch-practischen) Foderung entsprechen müssen. Der systematische Faden der Mathesis muß sich durch diese Lehrbücher hindurch ziehen, um dem Ganzen leichte Uebersicht, Festigkeit und Ueberzeugung zu gewähren. Aber dieser geistige Faden muß mehrfach zu practischen Anwendungen ausgesponnen werden, damit die Schüler die innige

Verkettung zwischen Theorie und Praxis erkennen; jene wegen dieser lieb gewinnen, diese aber über jene nicht vernachlässigen.

Soviel über die innere Form dieser Lehrbücher. Von gleicher Wichtigkeit ist ihre Schreibart. Diese darf für Realschüler weder allzu gedrängt und aphoristisch seyn, noch einem ausführlichen Commentare gleichen. Jenes setzt reifere Fassungskräfte voraus, als man der Regel nach fodern darf. Dieses aber hat den Nachtheil, daß der Geist des Vorzutragenden leicht durch die Menge der Worte erstickt wird. Daher hat sich der Verfasser bemüht, einen schicklichen Mittelweg zu treffen, wodurch der Schüler in den Lehrbüchern Stoff zum Nachlesen, der Lehrer aber auch Stoff zu Erläuterungen findet.

Die ausführliche Uebersicht der hier folgenden Zahlenlehre ergibt sich aus nachstehendem Inhalts-Verzeichnisse.

Aschaffenburg, im September 1820.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Einleitung in die Elementar-Mathematik.

§§.		Seite
1.	Größe überhaupt	1
2.	Mathematik oder Größenlehre . .	2
3.	Doppelte Betrachtung der Größe .	2
4	Reine und angewandte Mathematik .	3
5.	Unstetige und stetige Größe . . .	4
6.	Zahlenlehre und Raumlehre . .	5
7.	Haupttheile der angewandten Mathematik	6
8.	Mathematische Methode . . .	9
9.	Erklärungen und ihre Arten . .	9
10	Grundsätze, Axiome und Postulate .	11
11.	Lehrsätze und Aufgaben	11
12.	Zusätze und Anmerkungen . . .	13
13.	Willkührliche Sätze und Lehnsätze .	14
14.	Nutzen des mathematischen Studiums .	15
15.	Schluß-Bemerkung	17

Erstes Buch.

Von den Zahlen überhaupt.

1.	Merkmale überhaupt	18
2.	Gemeinschaftliche und unterscheidende Merkmale	19
3.	Gleichartige und ungleichartige Dinge .	19
4.	Zahl, Einheit, bestimmte und unbestimmte Zahlen	20
5.	Gleichartigkeit der Einheiten . .	21

§§.		Seite
6.	Größere, kleinere und gleiche Zahlen	21
7.	Veränderliche Größe der Einheit	21
8.	Veränderungen mit den Zahlen	22
9.	Addition	23
10.	Multiplication	23
11.	Subtraction	24
12.	Division	24
13.	Folgerungen hieraus	25
14.	Grundbegriffe und Grundsätze der Addition	25
15.	Grundbegriffe und Grundsätze der Multiplication	26
16.	Grundbegriffe und Grundsätze der Subtraction	27
17.	Grundbegriffe und Grundsätze der Division	28

Zweytes Buch.

Von den ganzen Zahlen.

1.	Benennungen bestimmter Zahlen	30
2.	Benennung der Ordnungen	31
3.	Zehntheiliges Zahlensystem	32
4.	Ziffer und ihr Stellenwerth	33
5.	Aussprechen der Zahlen	34
6.	Anschreiben der Zahlen	37
7.	Die Addition der Ziffer-Rechnung	38
8.	Willkührliches Zeichen der Addition	41
9.	Probe der Addition	42
10.	Die Subtraction in Ziffern	42
11.	Zeichen der Subtraction	45
12.	Probe der Subtraction	46
13.	Das Einmaleins	47
14.	Die Multiplication mit einer Ziffer	48

§§.		Seite
15.	Abkürzung dieser Auflösung	49
16.	Multiplication mehrzifferiger Zahlen .	51
17.	Multiplication der Factoren mit angehängten Nullen	53
18.	Zeichen der Multiplication . . .	54
19.	Division durch eine Ziffer . . .	55
20.	Division mit zwey Ziffern . . .	60
21.	Zeichen der Division	63
22.	Probe der Multiplication und der Division	63
23.	Bequeme Division mit einer Ziffer .	64
24.	Division mit 1 nebst mehreren Nullen .	65
25.	Division mit Nullen an einer oder an beyden Zahlen	66

Drittes Buch.

Von den benannten Zahlen.

1.	Begriff der benannten Zahlen . .	68
2.	Tabelle über einige benannte Zahlen .	69
3.	Addition benannter Zahlen . . .	70
4.	Subtraction in benannten Zahlen .	72
5.	Andere Anwendungen der Addition .	74
6.	Subtractions-Anwendungen . .	76
7.	Multiplication einer benannten Zahl mit einer unbenannten	78
8.	Division einer benannten Zahl durch eine unbenannte	80

Viertes Buch.

Von den Decimalbrüchen.

1.	Entstehung der Decimalbrüche . .	85
2.	Bezeichnung der Decimalbrüche . .	87

§§.		Seite
3.	Allgemeine Folgerungen . . .	88
4.	Rechnungsarten mit Decimalbrüchen .	90
5.	Reine und gemischte Decimalbrüche .	90
6.	Addition der Decimalbrüche . .	91
7.	Erläuterungen darüber . . .	93
8.	Subtraction der Decimalbrüche . .	94
9.	Multiplication eines Decimalbruchs mit 10	97
10.	Folgerungen daraus	98
11.	Multiplication eines Decimalbruchs mit Ganzen ohne Nullen . . .	100
12.	Multiplication eines Decimalbruchs durch Ganze mit Nullen	102
13.	Multiplication eines Decimalbruchs mit einem Decimalbruche . . .	103
14.	Division eines Decimalbruchs mit 10 .	106
15.	Folgerungen daraus	107
16.	Verwandelung des Divisionsrestes in Decimalbruchtheile	108
17.	Folgerungen daraus	112
18.	Division eines Decimalbruchs durch eine ganze Zahl	115
19.	Division einer ganzen Zahl durch einen Decimalbruch	118
20.	Division eines Decimalbruchs durch einen Decimalbruch	120
21.	Abgekürzte Multiplication . . .	124
22.	Abgekürzte Division	126

Fünftes Buch.

Von den gemeinen Brüchen.

1.	Entstehung der gemeinen Brüche . .	127
2.	Bedeutung des Nenners und Zählers .	128

§§.		Seite
3.	Willkührliche Bezeichnung der Brüche .	129
4.	Folgerungen aus dem Bisherigen . .	129
5.	Aechte und unächte Brüche . . .	132
6.	Bestimmung der Ganzen eines unächten . Bruchs	132
7.	Verwandlung einer Zahl in einen Bruch von gegebenem Nenner . . .	133
8.	Veränderung des Bruchs durch Multiplication seines Zählers und Nenners .	134
9.	Multiplication und Division eines Bruchs durch eine ganze Zahl . . .	136
10.	Veränderung des Bruchs durch Division seines Zählers und Nenners . .	137
11.	Zweyte Art, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren oder zu multipliciren	138
12.	Das Heben, und die kleinste Benennung der Brüche	139
13.	Gleichartigkeit oder gleiche Benennung der Brüche	142
14.	Abgekürztes Verfahren, Brüche gleichartig zu machen	146
15.	Bestimmung des Größer- und Kleinerseyns gegebener Brüche	149
16.	Das Einrichten der Ganzen und Brüche .	151
17.	Die Addition in Brüchen . . .	151
18.	Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche	153
19.	Die Subtraction in Brüchen . .	156
20.	Die Multiplication in gemeinen Brüchen	159
21.	Behandlung der Brüche benannter Zahlen.	162
22.	Die Division in gemeinen Brüchen . .	165

Sechstes Buch.

Die Buchstabenrechnung.

§§.		Seite.
1.	Entgegengesetzte, positive und negative Größen	169
2.	Bezeichnung entgegengesetzter Größen .	170
3.	Folgerungen aus dem Vorhergehenden .	171
4.	Addition entgegengesetzter Zahlen . .	172
5.	Subtraction entgegengesetzter Zahlen .	173
6.	Multiplication entgegengesetzter Zahlen .	175
7.	Division entgegengesetzter Zahlen . .	177
8	Begriff der Buchstabenrechnung . .	181
9.	Coefficienten und Exponenten der Buchstaben	183
10.	Addition in Buchstaben-Größen . .	184
11.	Subtraction in Buchstaben-Größen .	186
12.	Multiplication der Potenzen von gleichen Wurzeln	188
13.	Multiplication in Buchstaben-Größen .	190
14.	Division der Potenzen von gleichen Wurzeln	193
15.	Division in Buchstaben-Größen . .	196

Siebentes Buch.

Die Verhältnisse, Proportionen und Progressionen.

1.	Begriff, Arten, Glieder des Verhältnisses u. s. w.	202
2.	Folgerungen hieraus	205

§§.		Seite
3.	Werth des arithmetischen Verhältnisses; Arithmetische Proportion . . .	207
4.	Gleichheit der Summen aus den äußern und innern Gliedern . . .	208
5.	Einige Folgerungen hieraus . . .	209
6.	Begriff und Bestimmung der vierten arithmetischen Proportionalzahl . .	213
7.	Begriff und Bestimmung der mittlern arithmetischen Proportionalzahl . .	214
8.	Werth des geometrischen Verhältnisses; geometrische Proportion . . .	216
9.	Gleichheit der Producte aus den äußern und innern Gliedern . . .	217
10.	Folgerungen hieraus	218
11.	Begriff und Bestimmung der vierten geometrischen Proportionalzahl . .	224
12.	Begriff und Bestimmung der mittlern geometrischen Proportionalzahl . .	225
13.	Fernere Eigenschaften der geometrischen Proportion	226
14.	Begriff der einfachen Regel-Detri . .	230
15.	Auflösung der einfachen Regel-Detri .	233
16.	Beyspiele zur Uebung	236
17.	Begriff der Gewinn- und Verlustrechnung.	239
18.	Aus dem Einkaufe nebst Procentgewinn die Verkaufssumme zu finden . .	241
19.	Bestimmung des Einkaufs aus dem Verkaufe nebst Procentgewinn . .	245
20.	Begriff der zusammengesetzten Regel-Detri	249
21.	Auflösung der Regel Dequinque . .	252
22.	Beyspiele zur Uebung	255
23.	Auflösung zusammengesetzterer Fälle .	261
24.	Erklärung der Reesischen Regel . .	264
25.	Bildung des Reesischen Ansatzes . .	267

§§.		Seite.
26.	Weitere Bemerkungen darüber . .	271
27.	Begriff der gesellschaftlichen Theilrechnung .	275
28.	Anweisung zur Auflösung der gesellschaftlichen Theilrechnung . . .	276
29.	Auflösung der Beyspiele des §. 27 .	281
30.	Kapitalwerth nach der Zeit; nebst Anwendungen	284
31.	Begriff der Vermischungsrechnung . .	289
32.	Erste Art von Fällen der Vermischungsrechnung	290
33.	Zweyte Art von Fällen der Vermischungsrechnung	296
34.	Begriff der Kettenregel . . .	305
35.	Gewöhnliche Auflösung der Kettenregel .	306
36.	Auflösung der Kettenregel durch den Reesischen Ansatz	309
37.	Beyspiele zur Anwendung des Reesischen Ansatzes auf die Kettenregel . .	313
38.	Begriff und Arten der Progressionen .	318
39.	Allgemeiner Ausdruck der arithmetischen Progression. Beweis von $u = a + (n-1)d$	320
40.	Ableitung der Werthe von a, n und d .	323
41.	Die Summe aller Glieder zu finden. Bestimmung von a, u, n durch s . .	325
42.	Einige Anwendungen von der Summirung dieser Progressionen . . .	329
43.	Allgemeiner Ausdruck der geometrischen Progression	331
44.	Beweis von $u = a \times e^{n-1}$. Bestimmung von e und a	333
45.	Summirung aller Glieder der geometrischen Progression	334
46.	Begriff und Summirung der unendlichen Reihen	336

Achtes Buch.

Von der Auszziehung der Quadratwurzeln.

§§.		Seite.
1.	Bestimmung einiger Vorbegriffe	339
2.	Angabe der Theile des Quadrates ein- und zweytheiliger Wurzeln	341
3.	Folgerungen hieraus	344
4.	Bestimmung der Quadratwurzeln aus drey- oder vierzifferigen Zahlen	346
5.	Bestimmung der Theile des Quadrates mehrtheiliger Wurzeln	351
6.	Bestimmung der Wurzeltheile aus vielzifferigen Quadratzahlen	358
7.	Quadratwurzeln aus gemeinen Brüchen	365
8.	Entstehung und Begriff der Irrationalzahlen	367
9.	Bestimmung der Quadratwurzeln aus Irrationalzahlen	370
10.	Quadratwurzeln aus gemeinen und aus zehntheiligen Brüchen	376
11.	Einige Anwendungen von der Lehre der Quadratwurzel-Auszziehung	381

Neuntes Buch.

Von der Auszziehung der Cubikwurzeln.

1.	Vorbegriffe	387
2.	Theile der Würfel ein und zweytheiliger Wurzeln	388

3. Folgerungen hieraus 389
4. Cubikwurzeln aus Zahlen von 4, 5 und 6 Ziffern 393
5. Bestimmung der Stücke des Würfels mehrtheiliger Wurzeln . . . 396
6. Bestimmung der Cubikwurzeln aus vielzifferigen Zahlen überhaupt . . 400
7. Cubikwurzeln aus gemeinen Brüchen . 402
8. Irrationalzahlen durch Ausziehung der Cubikwurzeln 403
9. Ausziehung der Cubikwurzeln aus Irrationalzahlen 405
10. Cubikwurzeln aus gemeinen und Decimalbrüchen 407

Einleitung
in die Elementar-Mathematik.

§. 1.
Größe überhaupt.

An allen Gegenständen, welche man betasten oder sehen kann, bemerkt man die Eigenschaft, daß sie vermehrt oder vermindert werden können. Der Stein, den wir anfühlen; der Baum, welchen wir sehen, kann in größerer oder kleinerer Ausdehnung betrachtet werden. Der Stein könnte mehr oder weniger Masse haben, der Baum mehr oder weniger ausgedehnt seyn. Dasjenige, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, nennt man eine Größe. Steine, Bäume u. s. w. sind daher Größen,

weil man sich diese Dinge in ihren Theilen als vermehrt oder vermindert denken kann. Auch die Zahl, das Gewicht, die Kraft hat eine gewisse Größe, weil Zahlen, Gewichte, Kräfte vermehrt oder vermindert werden können.

§. 2.

Mathematik oder Größenlehre.

Eine Wissenschaft, welche sich blos mit der Größe beschäftigt, und dieselbe sowohl zu bestimmen als auch zu vergleichen und auszumessen lehrt, wird die Größenlehre oder Mathematik (auch Mathesis) genannt.

§. 3.

Doppelte Betrachtung der Größe.

Die Größen können auf zweyerley Weise gedacht werden. Entweder betrachtet man dieselben nur an sich; oder so, wie sie an wirklichen Gegenständen erscheinen. Jene Betrachtung heißt eine reine, diese eine angewandte. So kann man z. B. die Zahl 6 blos als eine Menge von 6 gleichartigen Dingen überhaupt betrachten; aber man kann sich auch 6 Menschen, 6 Bücher u. s. w. vorstellen.

Im ersten Falle wird die Zahl 6 rein, im zweyten angewandt betrachtet. Eben so ist es auch z. B. mit einer geraden Linie, welche man entweder als blose Ausdehnung in die Länge, d. h. rein, oder als Höhe eines Baumes, als Breite eines Weges u. s. w. d. h. angewandt ansehen kann.

§. 4.

Reine und angewandte Mathematik.

Da die Größe von doppelter Art ist, so zerfällt auch die wissenschaftliche Lehre von den Größen in zwey große Haupttheile, welche man die reine und angewandte Mathematik nennt. Die erstere ist jener Theil der Mathematik überhaupt, welcher sich mit den Größen im Allgemeinen d. h. mit ihrer reinen Betrachtung beschäftigt; die letztere aber betrachtet die Größe in ihrer mannigfaltigen Anwendung auf die wirklichen Gegenstände der Natur und der Kunst. Jener Theil heißt auch die theoretische, dieser die practische Mathematik. Die Lehre von den Zahlen überhaupt gehört daher in die reine; die Lehre von den benannten Zahlen, z. B. Gulden,

Kreutzer, Pfennige — Zentner, Pfunde, Lothe u. s. w. in die angewandte Mathematik. Desgleichen ist die Betrachtung der Dreyecke überhaupt eine reine oder theoretische; die Lehre aber, ein dreyeckiges Grundstück auf dem Felde wirklich auszumessen, eine angewandte oder practische. Daß die reine Mathematik der practischen vorangehen müsse, versteht sich hieraus von selbst.

§. 5.

Unstetige und stetige Größe.

Eine genauere Betrachtung der Größen zeigt wiederum, daß sie von doppelter Art seyen. Einige sind so beschaffen, daß es bey ihrer Bestimmung nur auf die Menge ihrer Theile ankömmt, ohne daß die Art ihrer Verbindung dabey berücksichtigt wird. Solche Größen nennt man unstetige oder Zahlen. Eine Menge von 8 Büchern bleibt unverändert, in was immer für einer Ordnung man sich dieselbe neben einander denken mag. Die Natur der Zahl 8 hängt also lediglich von der Menge ihrer Theile, nicht aber von der Art ihrer Verbindung ab. Bey andern Größen aber muß man auf die Art Rücksicht nehmen, wie

ihre Theile zum Ganzen verbunden sind. Diese Verbindung ist so ununterbrochen und lückenlos, daß da, wo ein Theil anfängt, der andere sich endigt, und zwischen diesen Grenzen nichts Fremdartiges enthalten ist. Sie heissen stetige Größen. Es gibt in dem Raume dreyerley Arten derselben: Linien, Flächen, Körper. Die Linie ist eine ununterbrochen fortschreitende Ausdehnung in die Länge von einem Orte zum andern, und wenn man sich dieses ununterbrochene Fortschreiten unterbrochen dächte, so würde man die Natur der Linie selbst aufheben. Eben so ist es bey der Fläche, welche in einer ununterbrochenen Ausdehnung nach Länge und Breite, und bey dem Körper, welcher in einer ununterbrochenen Ausdehnung nach Länge, Breite und Tiefe besteht.

§. 6.

Zahlen- und Raumlehre.

Aus dieser doppelten Art der Größen entspringt die Eintheilung der Größenlehre in die Zahlenlehre und in die Raumlehre. Zahlenlehre oder Arithmetik ist jener

Theil der Mathematik, welcher sich mit den unstetigen Größen d. h. mit den Zahlen; Raumlehre oder Geometrie aber derjenige Haupttheil, welcher sich mit den stetigen Größen des Raumes d. h. mit Linien, Flächen und Körpern beschäftigt. Hieraus ist klar, daß es sowohl eine reine und angewandte Zahlenlehre, als auch eine reine und angewandte Raumlehre gebe; je nachdem sich die Lehre von den Zahlen oder von den Raumgrößen nur auf diese Größen an sich, oder auf ihre wirkliche Anwendungen erstreckt. Daher die Benennungen: theoretische und practische Rechenkunst, theoretische und practische Geometrie.

§. 7.

Haupttheile der angewandten Mathematik.

Das Gebiet der angewandten Mathematik ist grenzenlos, da es eine unendliche Mannigfaltigkeit von wirklichen Gegenständen gibt, deren Größe man untersuchen kann. Doch läßt sich dieses große Feld in 4 Hauptgebiete abtheilen, welche man die mechanischen,

optischen, astronomischen und technischen Wissenschaften nennt.

Die mechanischen Wissenschaften (Mechanik) haben die Kräfte, welche in der Natur oder durch die Kunst wirksam sind und die Bestimmung ihres Maases zum Gegenstande. Unter Kraft versteht man aber Dasjenige, was eine Bewegung hervorbringt oder aufhebt z. B. die Schwerkraft, wodurch die Körper fallen; die Tragkraft des Balkens, worauf eine Last ruhet u. s. w. Als Theile der mechanischen Wissenschaften treten hervor: die Statik, d. h. die Lehre vom Gleichgewichte fester Körper; die Mechanik, oder die Lehre von der Bewegung fester Körper; die Hydrostatik, d. h. die Lehre vom Gleichgewichte tropfbar flüssiger Körper; die Hydraulik, oder die Lehre von der Bewegung dieser liquiden Körper, und andere.

Der Gegenstand der optischen Wissenschaften (Optik) ist das Licht nach der Gesetzmäßigkeit seiner Erscheinungen. Besondere Theile derselben sind: die Optik im engern Sinne, d. h. die Lehre von den Gesetzen der geradlinigen Verbreitung des Lichtes; die Ka-

toptrik, oder die Lehre von der Zurückwerfung des Lichtes, welches auf spiegelnde Flächen trifft, und die Dioptrik, welche die Gesetze der Brechung des Lichtes d. h. der veränderten Richtung des Lichtstrahls bey seinem Uebergange aus einem durchsichtigen Körper in einen andern angibt.

Der Gegenstand der astronomischen Wissenschaften (Astronomie) ist sowohl die Erde, als jeder andere sichtbare Himmelskörper. Die Aufgabe dieser wichtigen Lehre ist, alles Meßbare z. B. Größe, Gestalt, Entfernungen, Bewegungen u. s. f. der Erde und anderer Himmelskörper zu bestimmen.

Technische Wissenschaften endlich sind jene, deren Vollkommenheit aus einer schicklichen Verbindung der Naturwissenschaften mit der Mathematik hervorgeht. Sie beruhen daher sowohl auf practischen Kenntnissen der Natur, als auch auf theoretischen Lehren der Mathematik. Beyspiele derselben sind: bürgerliche Baukunst (Architectur), Kriegs-Baukunst (Fortification), Geschützkunst (Artillerie), Schiffsbaukunst, Steuermannskunst u. a.

§. 8.

Mathematische Methode.

Die Mathematiker bedienen sich einer eigenen Darstellungsweise ihrer Lehren, welche man die mathematische Methode zu nennen pflegt, und das Eigenthümliche hat, daß durch sie sowohl ein hoher Grad von Klarheit, als auch überzeugende Gewißheit erreicht wird. Diese Methode beginnt mit Erklärungen, woraus Grundsätze abgeleitet werden. An diese werden sodann Lehrsätze und Aufgaben geknüpft, welche wiederum in Zusätzen und Anmerkungen theils erläutert, theils erweitert werden. Die Bedeutung dieser Worte lehren die folgenden §.§.

§. 9.

Erklärungen und ihre Arten.

Eine vollständige Angabe jener Merkmale, wodurch man einen Gegenstand von dem andern unterscheidet, wird Erklärung (Definition) genennt. Die Erklärungen dienen, wie auch das Wort schon andeutet, zur Aufklärung unserer Begriffe z. B. das Mineral

ist ein unorganischer Naturkörper; die Pflanze ist ein organischer, unbeseelter Naturkörper; das Thier ist ein organischer, beseelter Naturkörper; der Mensch ist ein organisches, beseeltes, vernünftiges Geschöpf u. s. w. Diese Erklärungen sind entweder **Worterklärungen**, d. h. solche, welche nur den Begriff bestimmen, den man mit einem gewissen Worte verbindet, ohne daß zugleich auch nachgewiesen wird, ob und wie die erklärte Sache möglich oder wirklich sey; z. B. die **Universalmedizin** ist ein Heilmittel für alle Gebrechen des menschlichen Körpers; das **Quadrat** ist eine Figur, welche 4 gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat. Oder sie sind **Sacherklärungen** d. h. solche, woraus man sogleich die Entstehung des Gegenstandes erkennt; z. B. ein **Bruch** ist eine Zahl, welche entsteht, wenn man ein Ganzes in willkührlich viele gleiche Theile theilt und eine bestimmte Menge derselben zusammen nimmt; oder die **Kreislinie** ist jene krumme Linie, welche der eine Endpunct einer beliebigen geraden Linie beschreibt, die sich in einerley Ebene um den andern Endpunct einmal ganz herumbewegt.

§. 10.

Grundsätze: Axiome und Postulate.

Ein Satz, welcher so einleuchtend ist, daß man seine Wahrheit von selbst erkennt, so bald man seinen Sinn gefaßt hat, wird Grundsatz genannt. Zur Erläuterung dienen die Sätze: das Ganze ist so groß als alle seine Theile zusammen genommen; ein Theil ist kleiner als das Ganze u. s. w. Wenn diese Grundsätze Behauptungen enthalten, so heißen sie Axiome; z. B. wenn jede von 2 Größen der nämlichen dritten Größe gleich ist, so sind jene beyde Größen auch unter sich gleich. Verlangen aber die Grundsätze, daß etwas geschehen soll, so nennt man sie Postulate; z. B. eine gedachte gerade Linie auf beyden Seiten zu verlängern; eine gegebene Zahl zu vergrößern oder zu verkleinern u. s. w.

§. 11.

Lehrsätze und Aufgaben.

Unter Lehrsätzen (Theoremen) versteht man Sätze, welche eine Behauptung enthalten, deren Wahrheit nicht von selbst schon einleuchtend ist, sondern noch eine Rechtferti-

gung bedarf. Der Satz: wenn man den Nenner eines Bruches 6mal größer macht, seinen Zähler aber unverändert läßt, so ist der neue Bruch 6mal kleiner als der gegebene, ist ein Lehrsatz, weil seine Wahrheit nicht unmittelbar in die Augen springt, sondern erst aus der Bedeutung des Bruchs und seines Zählers und Nenners entwickelt werden muß. Daher fodert jeder Lehrsatz einen Beweis d. h. eine Zusammenstellung von einleuchtenden Gründen, wodurch der Verstand genöthigt wird, die Wahrheit der Behauptung einzusehen. Dieser Beweis ist entweder ein directer (ostensiver) oder ein indirecter (apagogischer), je nachdem die Wahrheit der Behauptung entweder aus dem innern Zusammenhange von Grund und Folge, oder aus der Unmöglichkeit ihres Gegentheils erkannt wird. Wenn man z. B. die Gleichheit zweyer geraden Linien daraus erkennt, daß beyde, mit einerley Maaße gemessen, als Gleichvielfache dieses Maaßes erscheinen, so ist dieser Beweis ihrer Gleichheit ein directer. Würde aber ihre Gleichheit dadurch ausgemittelt, daß man auf einen Widerspruch käme, wenn man annehmen wollte, die eine

Linie sey grösser oder kleiner, als die andere, so hieße dieser Beweis ein indirecter.

Aufgaben (Probleme) heissen Sätze, welche verlangen, daß etwas geschehen soll, was an sich nicht so einfach ist, daß es ohne besondere Anweisung zu Stand gebracht werden könnte; z. B. man soll mehrere gegebene Brüche zusammen addiren. Der Sinn dieser Aufgabe ist wohl klar; allein nicht so die Art, ihr Genüge zu leisten. Daher fodert jede Aufgabe eine Auflösung d. h. eine bestimmte Angabe des Verfahrens, wodurch ihrer Foderung entsprochen wird. Weil aber der Verstand auch die Richtigkeit dieser Auflösung erkennen will, so muß noch der Beweis folgen d. h. die Zusammenstellung jener Gründe, worauf die Wahrheit der Auflösung beruht.

§. 12.

Zusätze und Anmerkungen.

Zusätze (Corollarien) sind alle Sätze, welche aus den bereits als wahr erkannten Lehren so einfach folgen, daß ihre Wahrheit von selbst in die Augen springt. Sie bedürfen daher keiner besondern Beweise. Wenn man den

Satz: ein Bruch wird 8mal kleiner am Werthe, indem man unter seinen Zähler den 8mal größern Nenner setzt, als wahr erkannt hat, so ist der Satz: ein Bruch wird mit der Zahl 8 dividirt, wenn man seinen Nenner mit 8 multiplicirt und seinen Zähler unverändert läßt, ein Zusatz. Es versteht sich hieraus von selbst, daß in den Zusätzen nicht blos Behauptungen, sondern auch Foderungen enthalten seyn können.

Anmerkungen oder Scholien enthalten alles Dasjenige, was noch ferner zur Erläuterung oder Erweiterung der mathematischen Lehre dienet. Dahin gehören z. B. andere Beweise der Lehrsätze, abgeänderte Auflösungen der Aufgaben, Erläuterung allgemeiner Lehren durch Beyspiele, literärische Notizen jeder Art u. s. w.

§. 13.

Willkührliche Sätze und Lehnsätze.

Unter willkührlichen Sätzen versteht man jene Vorschriften, welche nicht in der Natur der Sache, sondern in dem Einverständnisse der Menschen gegründet sind. Die Annahme unserer Zahlenlehre: auf Zehn zu zäh-

len und nach zehnfach höhern Ordnungen zu Hunderten, Tausenden, u. s. w. aufzusteigen, ist eine blos willkührliche; denn man hätte auch z. B. auf acht oder auf zwölf u. s w. zählen können. Eben so willkührlich ist es, daß jede Ziffer, welche einer andern zur Linken steht, vermöge dieser Stelle, einen zehnmal größern Werth erhalte.

Lehnsätze oder Lemmen heissen jene Sätze, welche theils aus einer andern Wissenschaft, theils aus einem andern Theile der nämlichen Wissenschaft entlehnt und zur größern Vollständigkeit des Vortrags aufgenommen werden. So kommen z. B. in der Arithmetik Lehnsätze aus der Geometrie, Forstwissenschaft, Landwirthschaft u. s. w. vor, wenn ihre Lehren zum Behufe dieser Wissenschaften angewendet werden.

§. 14.

Nutzen des mathematischen Studiums.

Der Werth des mathematischen Studiums geht aus dem Einflusse hervor, welchen dasselbe theils auf die Bildung des Geistes, theils

auf das Wohl des bürgerlichen Lebens äussert. Jenen Nutzen kann man den subjectiven, diesen den objectiven nennen.

Da die mathematische Lehre von Erklärungen ausgeht, so vermeidet sie, durch feste Bestimmung der Begriffe, Zweydeutigkeit und Wortstreit. Aus diesen Erklärungen werden sodann Sätze abgeleitet, deren Wahrheit man von selbst erkennt, sobald ihr Sinn bekannt ist. Diese Grundsätze dienen nun selbst wieder zur Begründung der Lehrsätze und Aufgaben, deren Wahrheit durch strenge Beweise dargethan wird. Der Verstand, welcher diesem systematischen Gange folgt, übt, und verstärkt durch diese Uebung, seine eigene Kraft. Daher wurde die Mathematik zu allen Zeiten als ein äußerst kräftiges Bildungsmittel des Verstandes betrachtet.

Was nun die Anwendungen der Mathematik betrifft, so sind dieselbe so mannigfaltig, daß sie hier nicht alle aufgeführt werden können. Die Unentbehrlichkeit der practischen Rechenkunst, als mercantilische, politische, juristische Arithmetik, und der practischen Feldmeßkunst für das bürgerliche Leben, ist Jedermann bekannt.

Auch ist kein Theil der angewandten Mathematik ohne vielfachen Einfluß auf Künste, Fabrikwesen oder Gewerbe; die Naturwissenschaften bedürfen zu ihrer Ausbildung der Mathesis; der Cameral-, Finanz- und Forstwissenschaft dient sie, wie der Oeconomie und andern Lehren, als unentbehrliches Hülfsmittel.

§. 15.

Schlußbemerkung.

Obgleich man bey Darstellung der hier folgenden Zahlenlehre die Vorschriften der mathematischen Methode befolgt hat, so sind die einzelnen §. §. zwar mit besondern Ueberschriften, aber nicht mit den Kunstwörtern: Erklärung, Grundsatz, Lehrsatz, Aufgabe u. s. w. bezeichnet worden. Es wird dem Schüler, zumal unter Anleitung des Lehrers, nicht schwer fallen, den Inhalt jedes §. nach einem dieser Ausdrücke zu benennen; eine Verstandesübung, welche den Anfängern sehr zu empfehlen ist.

Der Zahlenlehre
Erstes Buch.
Von den Zahlen überhaupt.

§. 1.
Merkmale überhaupt.

Dasjenige, wodurch man einen Gegenstand erkennt und von andern unterscheidet, nennt man das **Merkmal** dieses Gegenstandes. So sind z. B. **unorganisch** und **Naturkörper** die Merkmale des Minerals; **organisch, unbeseelt, Naturkörper** die Merkmale der Pflanze u. s. w., und es ist klar, daß der Inbegriff dieser Merkmale die Natur der Gegenstände bestimmt, welchen sie zukommen.

§. 2.
Gemeinschaftliche und unterscheidende Merkmale.

Die Merkmale der Gegenstände sind entweder in mehreren vorhanden, oder sie kommen nur einigen von ihnen zu, andern nicht. Jene heissen gemeinschaftliche, diese unterscheidende Merkmale. Das Merkmal Naturkörper ist in Bezug auf Mineral und Pflanze ein gemeinschaftliches, das Merkmal organisch aber ein unterscheidendes.

§. 3.
Gleichartige und ungleichartige Dinge.

Dinge heissen gleichartig oder von einerley Art, wenn sie nach ihren gemeinschaftlichen Merkmalen betrachtet werden; ungleichartig oder von verschiedener Art, wenn man sie nach ihren unterscheidenden Merkmalen betrachtet. Das Mineral und die Pflanze sind als Naturkörper gleichartige Dinge, aber als Pflanze und als Mineral sind sie ungleichartig.

§ 4.
Zahl, Einheit, bestimmte und unbestimmte Zahlen.

Die Vorstellung der Vielheit gleichartiger Dinge heißt eine Zahl, und eines von diesen gleichartigen Dingen wird die Einheit genannt. Daher ist die Zahl eine Vielheit von Einheiten. Da diese Vielheit bestimmt oder unbestimmt seyn kann, so ist auch die Zahl selbst eine bestimmte oder eine unbestimmte. Wenn man sich z B. ein Buch denkt, so kann man sich diesen Gegenstand auch noch öfter zugleich vorstellen, woraus eine gewisse Vielheit d. h. eine Zahl von Büchern entsteht, deren Einheit eines dieser Bücher ist. — Ein Pferd und ein Hirsch bilden als solche, d. h. das Pferd als Pferd und den Hirsch als Hirsch betrachtet, nicht die Zahl 2; denn es sind weder zwey Hirsche, noch zwey Pferde. Betrachtet man aber in ihnen das gemeinsame Merkmal vierfüßiges Thier, so bilden sie die Zahl von 2 vierfüßigen Thieren. — Die Zahlen fünf, acht, zwölf u. s. w. sind bestimmte, die Zahlen a, b, n und dergl. aber unbestimmte Zahlen, da man sich unter

fünf nur eine bestimmte Menge, unter a aber jede beliebige Menge von Einheiten vorstellen kann.

§. 5.

Gleichartigkeit der Einheiten.

Da die Einheiten, aus deren Verbindung eine Zahl gebildet wird, gleichartig seyn müssen, so kann man ungleichartige Dinge nie in eine Zahl zusammen fassen. Dieser Satz ist, seiner Einfachheit wegen, ein Grundsatz, und, wegen seiner Wichtigkeit, einer der vorzüglichsten in der Zahlenlehre.

§. 6.

Größere, kleinere und gleiche Zahlen.

Eine Zahl, welche mehrere Einheiten enthält, heißt die größere, und, wenn sie aus wenigern besteht, die kleinere Zahl. Gleiche Zahlen sind jene, welche aus eben so vielen Einheiten bestehen.

§. 7.

Veränderliche Größe der Einheit.

Obschon der Begriff der Einheit, als des Elementes der Zahl, bestimmt und unverän-

derlich ist, so kann doch die Größe der Einheit verschieden seyn, wie dieses aus vielen Beyspielen des practischen Lebens bekannt ist. Soll daher eine Zahl nach ihrem Werthe vollkommen bestimmt seyn, so muß man, nebst der **Menge** ihrer Einheiten, auch die eigentliche **Größe** dieser Einheiten kennen. Die Zahl sechs drückt zwar immer die nemliche Menge von Einheiten aus; allein diese Zahl ist sehr verschieden am Werthe, nachdem man sich z. B. unter ihr sechs **Pfunde** oder sechs **Lothe** vorstellt.

§. 8.

Veränderungen mit den Zahlen.

Sollen die Zahlen verändert werden, so hängt dieses lediglich von der Veränderung ihrer Einheiten ab. Da man hier diese Einheiten alle als gleich groß annimmt, so können die Zahlen nur dadurch verändert werden, daß man ihnen Einheiten beyfügt, oder solche von ihnen wegnimmt. Jene Veränderung heißt man die **Vermehrung**, diese die **Verminderung** der Zahl, und es ist klar, daß Vermehrung und Verminderung die einzigen

Veränderungen sind, welche man mit den Zahlen vornehmen kann.

§. 9.

Addition.

Wenn man eine Zahl dadurch vermehret, daß ihr andere, an Größe verschiedene, nach und nach beygefügt werden, so nennt man dieses Verfahren die Addition. Addiren heißt daher nichts anders, als mehrere ungleiche, aber gleichartige Zahlen in eine einzige Zahl verwandeln, welche allen gegebenen zusammengenommen gleich ist. Wenn man z. B. zur Zahl drey die Zahlen sieben und neun setzt, um die Zahl neunzehn zu erhalten, so hat man addirt.

§. 10.

Multiplication.

Man kann auch eine Zahl dadurch vermehren, daß man sie mehrmal zu sich selbst setzt, wobey keine ungleiche, sondern mehrere gleiche Zahlen zusammengefügt werden. Dieses Verfahren heißt die Multiplication. Multipliciren ist daher nichts anders, als das mehrmalige Zusammensetzen einer und der näm-

lichen Zahl. Wenn man z. B. die Zahl sechs viermal zu sich selbst setzte, um die Zahl vier und zwanzig zu erhalten, so hätte man sechs durch vier multiplicirt.

§. 11.

Subtraction.

Wenn man von einer größern Zahl eine kleinere einmal hinweg nimmt, so heißt dieses Verfahren die Subtraction. Subtrahiren ist demnach nichts anders, als die Verminderung einer größern Zahl durch eine kleinere. Wenn man z. B. von der Zahl zwölf die Zahl sieben einmal hinweg nimmt, um die Zahl fünf zu erhalten, so hat man subtrahirt.

§. 12.

Division.

Wenn eine größere Zahl durch eine kleinere dergestalt vermindert wird, daß man diese von jener so oft hinwegnimmt, als es möglich ist, so heißt dieses Verfahren die Division. Dividiren ist daher nichts anders, als Untersuchen, wie oft eine kleinere Zahl von der größern hinweggenommen werden kann. Wenn

man von fünfzehn die Zahl drey so oft weg- nimmt, als es möglich ist, und findet, daß es fünfmal geschehen kann, so hat man fünfzehn durch drey dividirt.

§. 13.

Folgerungen hieraus.

Aus dem Bisherigen ergibt sich, daß die Addition und Multiplication die einzigen Vermehrungsarten, die Subtraction und Division aber die einzigen Verminderungsarten der Zahlen sind, woraus die sogenannten vier Rechnungsarten oder Species der Arithmetik hervorgehen, welche nun noch näher erläutert werden müssen.

§. 14.

Grundbegriffe und Grundsätze der Addition.

Durch die Addition werden mehrere ungleiche Zahlen in eine einzige verwandelt, welche ihnen zusammengenommen gleich ist. Jene gegebene Zahlen werden die zu summirenden oder zu addirenden genannt; diese Zahl aber heißt die Summe. Hieraus folgt:

I. Die zu addirenden Zahlen müssen gleichartig seyn; denn aus ihnen soll eine neue Zahl, die Summe, entstehen.

II. Da die Summe so groß ist, als alle zu addirende Zahlen zusammengenommen, so können diese für jene, und jene kann für diese gesetzt werden.

III Weil die Größe der Summe allein von der Größe der zu summirenden Zahlen abhängt, so ist es einerley, in welcher Ordnung diese Zahlen zusammengesetzt werden, wenn sie nur alle in die Summe kommen.

§. 15.

Grundbegriffe und Grundsätze der Multiplication.

Bey der Multiplication wird jene Zahl, welche mehrmal zu sich selbst gesetzt werden soll, der Multiplicand; die Zahl aber, welche anzeigt, wie oft dieses geschehen soll, der Multiplicator genennt. Die dritte Zahl, welche aus dieser Zusammensetzung hervorgeht, heißt das Product oder Factum. Auch werden Multiplicand und Multiplicator mit dem

gemeinsamen Namen **Factoren** bezeichnet. Hieraus folgt:

I. Die Multiplication ist ihrer Natur nach eine Addition und das Product nichts anders, als die Summe mehrerer gleichen Zahlen.

II. Der Multiplicand ist so oft im Producte enthalten, als die Einheit in dem Multiplicator. Eben so muß auch das Product den Multiplicator so oft enthalten, so oft die Einheit in dem Multiplicanden enthalten ist.

III. Einerley Factoren geben, auch mit verkehrter Ordnung des Multiplicirens, einerley Factum. Ob man z. B. die Zahl sechs mit vier, oder die Zahl vier mit sechs multiplicirt, ist einerley und gibt in beyden Fällen vier und zwanzig zum Producte.

§. 16.

Grundbegriffe und Grundsätze der Subtraction.

Bey der **Subtraction** wird eine kleinere Zahl von der größern einmal weggenommen. Diese letztere heißt daher auch die **größere** Zahl, jene aber die **kleinere** Zahl oder der **Subtrahend**; beyde zusammen nennt

man die Posten und den übrigbleibenden Theil der größern Zahl den Ueberrest, Ueberschuß, Rest oder die Differenz. Hieraus ergibt sich:

I. Die Posten müssen gleichartige Zahlen seyn, da die kleinere Zahl als ein Theil der größern betrachtet werden muß

II. Wenn man den Rest und die kleinere Zahl zusammenfügt, so entspringt die größere wieder.

III. Nimmt man den Rest von der größern Zahl weg, so bleibt die kleinere übrig.

IV. Sind die Posten gleich, so ist der Rest (Differenz) = 0

V. Addition und Subtraction sind einander entgegengesetzt. Wenn man daher zu irgend einer Zahl irgend eine andere addirt, und nun diese leztere wiederum von der Summe subtrahirt, so hat jene erstere Zahl keine Veränderung erlitten.

§. 17.

Grundbegriffe und Grundsätze der Division.

Bey der Division wird eine kleinere Zahl

von der größern so oft abgezogen, als es mög=lich ist. Diese größere heißt Dividend, jene kleinere aber Divisor, und die Zahl, welche andeutet, wie oft dieser Abzug geschehen kann, wird Quotient genennt. Aus diesem er=hellet:

I. Der Divisor ist so oft in dem Dividenden enthalten, als wie viele Einheiten der Quo=tient enthält.

II. Wenn man den Divisor mit dem Quo=tienten oder den Quotienten mit dem Divi=sor multiplicirt, so entspringt zum Producte der Dividend.

III. Wenn man mit dem Quotienten in den Dividenden dividirt, so entsteht der Divisor.

IV. Die Multiplication und die Division sind einander entgegengesetzt. Wenn man ir=gend eine Zahl mit irgend einer andern mul=tiplicirt, und dieses Product wiederum mit der letztern dividirt, so kömmt die erstere Zahl wieder zum Vorschein.

Zweytes Buch.

Von den ganzen Zahlen.

§. 1.

Benennungen bestimmter Zahlen.

Um die verschiedenen Zahlen zu unterscheiden, bezeichnet man sie mit besondern Namen. Die Einheit, für sich selbst betrachtet, nennt man Eins; setzt man dazu noch eine Einheit, so entsteht die kleinste Zahl von zwey Einheiten oder Zwey; kömmt hierzu noch eine Einheit, so heißt die Zahl Drey; dieser wieder eine beygesetzt gibt Vier; zu vier eine, ist Fünf; zu fünf eine, Sechs; zu sechs eine, Sieben; zu sieben eine, Acht; zu acht eine, Neun, und zu neun eine, gibt Zehn u. s. w. nach den bekannten Namen: Eilf, Zwölf, Dreyzehn, Vierzehn, Fünfzehn,

Sechszehn, Siebenzehn, Achtzehn und Neunzehn. Zur Bequemlichkeit nennt man eine Zahl von zweymal zehn mit einem Worte Zwanzig; dreymal zehn, Dreyßig; viermal zehn, Vierzig; fünfmal zehn, Fünfzig; sechsmal zehn, Sechzig; siebenmal zehn, Siebenzig; achtmal zehn, Achtzig; neunmal zehn, Neunzig, und zehnmal zehn, Hundert. Ferner heißt man zehnmal Hundert, Tausend; tausendmal Tausend, eine Million; millionmal Million, eine Billion; millionmal Billion, eine Trillion; millionmal Trillion, eine Quadrillion u. s. w.

§. 2.

Benennung der Ordnungen.

Man nennt die Zahl von zehn Einheiten einen Zehner; ferner zehn Zehner einen Hunderter; zehn Hunderter einen Tausendter u. s. f., wodurch Zahlen entstehen, deren jede zehnmal größer, als die unmittelbar vorhergehende ist. Man heißt sie höhere Ordnungen und sagt, die Zehner sind von der ersten Ordnung, die Hunderter von der zweyten, die Tausendter von der

dritten Ordnung u. s. w. Hieraus folgt, daß eine Einheit von der höhern Ordnung zehnmal größer ist, als eine Einheit von der nächsten niedern Ordnung; so wie auch umgekehrt zehn Einheiten der niedrigern Ordnung eine Einheit der nächst höhern bilden.

§. 3.

Zehntheiliges Zahlensystem.

Dieses Gesetz, bis auf Zehn zu zählen und immer neue zehnmal größere Einheiten zu bilden, nennt man das zehntheilige oder decadische Zahlensystem. Man sieht leicht, daß es keineswegs in der Natur der Sache, sondern in der Willkühr der Menschen seinen Grund hat. Wahrscheinlich ist dasselbe aus der Zahl der Finger entstanden, weil ein gewisser Instinct den Menschen antreibt, an den Fingern zu zählen. Man hätte auch auf Zwölf zählen und immer zu dem zwölffach Höhern aufsteigen können, wodurch das zwölftheilige oder Duodecimal-System entstanden wäre. Der berühmte Leibnitz hat in seiner bekannten Arithmetica dyadica gezeigt, wie man nur auf Zwey zählen und alle Rechnun-

nach diesem einfachsten aller Zahlensysteme durchführen könne.

§. 4.

Ziffer und ihr Stellen-Werth.

Unter Ziffer versteht man jene willkührlich gewählte Schriftzüge zur Bezeichnung der Zahlen. Sie sind daher als Zahlzeichen anzusehen. Die einfachen Ziffer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nebst der 0, welche arabischen Ursprungs sind, kennt Jedermann; aber der Kunstgriff, mit so wenig Zeichen alle mögliche Zahlen darzustellen, ist merkwürdig und macht dem menschlichen Verstande Ehre. Er besteht darin, daß man annimmt, eine Ziffer, welche einer andern unmittelbar zur Linken steht, habe vermöge ihrer Stelle einen zehnfach höhern Werth. Diesen Werth nennt man daher auch den Stellen-Werth, welcher von dem Ziffer-Werthe verschieden ist, indem lezterer durch die Art des Schriftzugs bestimmt wird. Denkt man sich z. B. die Ziffer 6, so stellt diese eine Menge von sechs gleichartigen Dingen vermöge ihres Zifferwerthes vor. Setzt man zur Linken dieser

6 die Ziffer 8, so hat diese 8, nach ihrer Stelle, einen zehnfach höhern Werth, als die 6. Da 6 die Einer bedeuten, so stellen 8 die Zehner vor, und die beyden Ziffer drücken zusammen eine Menge von achtzig und sechs d. h. von sechs und achtzig Einheiten aus. Stände zur Linken der 8 noch eine 5, so hätte diese, nach ihrem Zifferwerthe, die Bedeutung von fünf, nach ihrem Stellenwerthe aber die Bedeutung von Hunderten. Daher stellte diese 5 hier fünf Hunderte vor und die ganze Zahl drückte eine Menge von fünf Hundert sechs und achtzig Einheiten aus u. s. w.

§. 5.

Aussprechen der Zahlen.

Das Aussprechen einer in Ziffern gegebenen Zahl beruht darauf, daß man jeder Ziffer ihren gehörigen Zifferwerth und ihren Stellenwerth gibt, wozu folgende Anweisung dienet. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Gefache, deren jedes drey Ziffer enthält und bemerke die Stelle der Millionen mit einem Puncte, jene der Billionen mit zwey, der Trillionen mit drey Puncten u. s. f. Nun

spreche man, von der höchsten Stelle an, jede einzelne Ziffer nach ihrem doppelten Werthe aus und schreite so bis zur niedrigsten Ziffer fort. Befinden sich Nullen in der Zahl, so werden sie beym Aussprechen übergangen. Folgende Beyspiele erläutern dieses.

I. Man soll die Zahl 78536428 aussprechen. Dies gibt Folgendes:

7	8,	5	3	6,	4	2	8
Zehner von Million	Einer von Million	Hunderttausendter	Zehntausendter	Tausendter	Hunderter	Zehner	Einer

Man spricht daher: acht und siebenzig Million, fünfmal Hundert sechs und dreyssig Tausend, vierhundert acht und zwanzig. Eigentlich hätte man sagen sollen: 7 Zehner von Million, 8 Einer von Million, 5 Hunderttausende, 3 Zehntausende, 6 Tausende, 4 Hunderte, 2 Zehner und 8 Einer; allein der Sprachgebrauch will es anders.

II. Die Zahl 8379458612734613 abgetheilt, stehet so:

8,3 7 9,4 5 8,6 1 2,7 3 4,6 1 3

8	Tausendter von Billion
3	Hunderter von Billion
7	Zehner von Billion
9	Einer von Billion
4	Hunderttausendter von Million
5	Zehntausendter von Million
8	Tausendter von Million
6	Hunderter von Million
1	Zehner von Million
2	Einer von Million
7	Hunderttausendter
3	Zehntausendter
4	Tausendter
6	Hunderter
1	Zehner
3	Einer

folglich mit Worten: acht Tausend drey Hundert neun und siebenzig Billion, viermal Hundert acht und fünfzig Tausend, sechs Hundert und zwölf Million, siebenmal Hundert vier und dreysig Tausend sechs Hundert und dreyzehn.

III. Die Zahl 8076000893005000832004 abgetheilt, gibt:

8,076,000,893,005,000,832,004 oder: acht

Tausend sechs und siebenzig Trillion, acht Hundert drey und neunzig Billion, fünf Tausend Million, achtmal Hundert zwey und dreyßig Tausend und vier.

§. 6.

Anschreiben der Zahlen.

Um eine mit Worten gegebene Zahl durch Ziffer darzustellen, drücke man jede Ordnung derselben durch die gebührende Ziffer aus und weise ihr die zugehörige Stelle an. Stellen, worin keine Werthe gegeben sind, werden mit Nullen ausgefüllt. Man kann die Ziffer nicht eher richtig anschreiben, bis sie alle mit Worten genannt sind. Nachstehende Beyspiele erläutern dieses.

I. Um eine Million, sechs Hundert drey und achtzig Tausend, fünf Hundert und zwanzig anzuschreiben, müssen alle Ordnungen von Million bis zu den Einern mit Ziffern besetzt werden, weil in allen Zahlenwerthe vorhanden sind. Daher ist diese Zahl eigentlich 1 Million, 6 Hunderttausend,

80 Tausend, 5 Hundert, 20 und 3 oder soviel als 1,683,523.

II. In folgender Zahl: acht Hundert und drey Million, dreyßig Tausend und neun fehlt, zwischen den Hunderten und Einern von Million, die Ordnung der Zehner von Million; daher muß diese Stelle mit einer Nulle ausgefüllt werden. Da nun auf die Einer von Million sogleich die Zehntausende folgen, so fehlen die Hunderttausende und es muß wieder eine Nulle eingeschalten werden. Endlich sind nach den Zehntausenden sogleich die Einer genannt und folglich drey Ordnungen übergangen worden, welche wieder mit Nullen auszufüllen sind. Die Zahl ist daher diese: 803,030,009.

Nebst den angegebenen Regeln ist die mehrfache Uebung das beste Mittel für Anfänger, um sich sowohl im Aussprechen als Anschreiben der Zahlen die nöthige Fertigkeit zu erwerben.

§. 7.

Die Addition der Ziffer-Rechnung.

Um mehrere in Ziffern gegebene Zahlen zu addiren, bemerke man folgende Regeln:

I. Man schreibe die gegebenen Zahlen so, daß alle gleichnamige Ordnungen unter einander stehen und ziehe einen Strich.

II. Zähle man nun alle Einer derselben zusammen, so beträgt ihre Summe entweder wieder einen Einer, oder sie macht einen Einer und einen Zehner, oder sie gibt einen oder mehrere Zehner ohne oder mit einigen Einern.

III. Im ersten Falle setze man den gefundenen Einer unter die Reihe der Einer. Im zweyten schreibe man den Einer hin, nehme aber den mit ihm verbundenen Zehner zur Reihe der Zehner der gegebenen Zahlen und mache nun die Summe aller Zehner. Im dritten Falle setze man in die Stelle der Einer eine Nulle oder die ausser den Zehnern noch vorhandene Einer, und zähle wiederum die erhaltenen Zähler zu der folgenden Stelle.

IV. Hier ist nun diese Summe aller Zehner entweder allein ein Zehner, und nun kömmt er unter die Reihe der Zehner; oder sie ist ein Zehner und ein Hunderter, und jetzt kömmt der Zehner unter die Zehner und den Hunderter nimmt man zur Ordnung der Hunderter hinüber. Beträgt aber diese Summe aus Zehnern gerade

einen oder mehrer Hunderte ohne Rest, so kömmt in die Stelle der Zehner eine Nulle, und die Hunderter werden zu den Hunderten hinüber gezählt. Wenn man auf diese Weise mit jeder folgenden Ordnung verfährt bis zur höchsten, so findet man die richtige Summe, weil die Summe aller gleichartigen Theile auch die Summe der Ganzen geben muß. Nachstehende Beyspiele dienen zur Erläuterung.

I. Man soll die Zahlen 17804, 374902, 4592, 80301 und 387 addiren. Setzt man dieselbe gehörig unter einander, so erhält man:

17804	
374902	
4592	zu addirende Zahlen.
80301	
387	
477986	Summe.

Diese Summe ist so entstanden, daß man zuerst alle Einer zusammen gezählt hat, welche 16 betragen. Nun ist aber 16 Einer soviel, als 1 Zehner und 6 Einer; daher kommen diese 6 Einer unter die erste Reihe, und den 1 Zehner nimmt man zur nächst folgenden Ordnung,

worin die untere Ziffer 8 wegen dieser 1, welche man im Sinne behalten hat, nun eine 9 wird. Die Summe aller Zehner ist 18 d. h. 8 Zehner und 1 Hunderter; daher bleiben jene unter den Zehnern stehen und dieser wird zu seiner gleichartigen Ordnung gezählt. Alle Hunderte betragen nunmehr 29 d. h 2 Tausende, welche zur folgenden Ordnung kommen und 9 Hunderte, welche bey den Hunderten bleiben. Die Summe aller Tausende ist nun 17 d. h. 1 Zehntausendter und 7 Tausende, welche letztere angeschrieben werden, da der 1 Zehntausendter zur nächst höhern Ordnung kömmt, und mit den hier vorhandenen Ziffern 17 Zehntausende, oder Hunderttausendter und 7 Zehntausende ausmacht. Diese 7 werden daher hingesetzt und die 1 kömmt hinüber, wo sie mit den gegebenen Ziffern eine Summe von 4 Hunderttausenden bildet.

§. 8.

Willkührliches Zeichen der Addition.

Das Zeichen der Addition ist dieses +, welches zwischen die zu addirenden Zahlen gesetzt und durch plus oder zu ausgedrückt wird. So

heißt z. B. 12 + 8 + 14 + 9 soviel als diese vier Zahlen sollen addirt werden. Da nun ihre Summe 43 beträgt, so setzt man das Zeichen der Gleichheit = zwischen die zu summirenden Zahlen und ihre Summe, nämlich 12 + 8 + 14 + 9 = 43.

§. 9.

Probe der Addition.

Wenn man sich bey Additionsaufgaben von der Richtigkeit der Rechnung überzeugen will, so ist zu rathen, daß man die Summe aller gleichartigen Ordnungen der gegebenen Zahlen einmal von unten hinauf und dann von oben herunter bilde. Erhält man in beyden Fällen die nämliche Hauptsumme, so ist sehr wahrscheinlich, daß sie die richtige sey. Uebrigens ist bey allen arithmetischen Arbeiten dem Anfänger eine ungetheilte Aufmerksamkeit und öftere Uebung als das sicherste Mittel gegen Rechnungsfehler zu empfehlen.

§. 10.

Die Subtraction in Ziffern.

Wenn eine kleinere Zahl von einer größern

subtrahirt werden soll, so verfahre man folgendergestalt:

I. Die beyden Zahlen werden so unter einander gestellt, daß die gleichartigen Stellen beysammen sind, und nun wird ein Absönderungs-Strich gezogen.

II. Sind nun alle einzelne Ziffer der kleinern Zahl kleiner als die gleichartigen der größern, so nehme man jene von diesen in Gedanken hinweg und schreibe den Rest unter diese Ziffer. Wären aber beyde Ziffer einander gleich, so käme eine Nulle an diese Stelle. Siehe Beyspiel I.

III. Soll aber eine größere Ziffer der kleinern Zahl von einer kleinern in der größern weggenommen werden, so nehme man von der nächst höhern Ziffer in der größern Zahl eine Einheit herüber, welches Eins Lehnen genennt und durch ein Pünctchen an der höhern Ziffer bemerkt wird. Da diese Einheit in der nächst niedrigern Ordnung Zehn beträgt, so kann, wenn man zu diesen Zehn die vorhandenen Einheiten der niedrigern Ordnung setzt, die größere Ziffer von dieser Summe abgezogen werden. Siehe Beyspiel II.

IV. Sind in der größern Zahl mehrere auf einander folgende Nullen, so soll man die Ziffer der kleinern Zahl entweder von der ersten dieser Nullen abziehen, oder sie soll von einer kleinern Ziffer, auf welche diese Nullen erst folgen, weggenommen werden. Im ersten Falle wird die Nulle der niedrigsten Ordnung eine 10, alle übergangene Nullen aber werden 9. Im zweyten Falle werden a l l e im Lehnen übergangene Nullen zu 9, und die kleinere Ziffer, wovon man zuerst abziehen sollte, wird um 10 vermehrt. Siehe Beyspiel III.

B e y s p i e l e.

I. 895247865 größere Zahl } oder die Posten
74235432 kleinere Zahl }

821012433 Rest oder Differenz.

II. 583245821 größere Zahl
97823948 kleinere Zahl

485421873 Rest oder Differenz.

III. 9700260030002 größere Zahl
8749382978623 kleinere Zahl.

950877051379 Rest.

Die Richtigkeit der Regeln I, II und III leuchtet von selbst ein, jene von IV soll an obigem Beyspiele III erläutert werden. Hier soll man drey Einer von zwey Einern abziehen, welches nicht möglich ist. Allein da man durch die Subtraction nicht fodert, jede einzelne Ziffer der kleinern Zahl von jeder einzelnen Ziffer der größern wegzunehmen, so kömmt es nur auf den Unterschied der ganzen Zahlen, nicht aber auf jenen ihrer einzelnen Theile an. Daher muß man hier bis in die Stelle der Zehntausende gehen, weil die Zwischenordnungen keine Ziffer enthalten. Da nun 10,000 = 9000 + 900 + 90 + 10 = 9990 + 10 ist so werden die drey Nullen in obiger Zahl in drey 9 verwandelt und die 10 kömmt zu den zwey Einern, um 12 zu bilden, wovon 3 abgezogen, noch 9 übrig läßt.

§. 11.

Zeichen der Subtraction.

Das willkührliche Zeichen der Subtraction ist ein kleiner Querstrich —, welcher zwischen die beyden Posten gesetzt und durch minus oder weniger ausgesprochen wird. Z. B. 30 —

24 = 6 heißt 30 weniger 24 ist gleich 6. Ebenso 19 — 12 = 7; 1894 — 785 = 1809 u. s. w.

§. 12.

Probe der Subtraction.

Die gewöhnliche Probe der Subtraction besteht darin, daß man die kleinere Zahl und den Rest addirt, welche Summe der größern Zahl gleich seyn muß. Man könnte aber auch den gefundenen Rest von der größern Zahl abziehen, um zu sehen, ob die erhaltene Differenz der kleinern Zahl gleich wäre. Z. B:

93758926 größere Zahl
 8597858 kleinere Zahl
―――――――――
85161068 Rest.

Wird zu diesem Reste die kleinere Zahl addirt, so erhält man die größere, nämlich:

85161068 Rest } addirt,
 8597858 kleinere Zahl }
―――――――――
93758926 größere Zahl

oder auch:

93758926 größere Zahl } subtrahirt,
85161068 Rest

8597858

Uebrigens ist auch hier die ungetheilte Aufmerksamkeit das beste Mittel zur Vermeidung der Rechnungsfehler.

§. 13.

Das Einmaleins.

Als Vorbereitung zur Multiplication ist die Verfertigung des Einmaleins oder des sogenannten pythagoräischen Täfelchens nöthig, worunter man eine Sammlung aller Producte versteht, welche durch irgend zwey der einfachen Zahlen von 1 bis 9 entstehen. Es ist Folgendes:

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	B
C	2	4	6	8	10	12	14	16	18	D
E	3	6	9	12	15	18	21	24	27	F
G	4	8	12	16	20	24	28	32	36	H
I	5	10	15	20	25	30	35	40	45	K
L	6	12	18	24	30	36	42	48	54	M
N	7	14	21	28	35	42	49	56	63	O
P	8	16	24	32	40	48	56	64	72	Q
R	9	18	27	36	45	54	63	72	81	S

Man sieht leicht, daß die Reihe AB die einfachen Zahlen von 1 bis 9, die Reihe CD ihre Doppelte, EF ihre Dreyfache und s. f. bis zur Reihe RS, welche ihr Neunfaches enthält, angeben. Es ist nöthig, daß der Anfänger diese 81 kleine Producte mit Fertigkeit auswendig lerne, weil ohne dieses die Multiplication sehr erschwert wird.

§. 14.

Die Multiplication mit einer Ziffer.

Um eine gegebene Zahl mit einem Einer zu multipliciren, setze man

I. den Multiplicator unter die Einer des Multiplicanden, ziehe einen Strich, bilde, nach dem Einmaleins, ein Product aus diesem Multiplicator in jene Einer und setze dasselbe unter die Einer des Multiplicanden. Siehe das Beyspiel.

II. Man mache das Product aus dem Multiplicator in die Zehner des Multiplicanden und schreibe es mit seiner niedrigsten Ziffer unter diese Zehner.

III. Fährt man damit fort, so entstehen so viele unter einander stehende Theil-Producte,

als aus wie vielen Ziffern der Multiplicand besteht. Die Summe derselben ist das Product.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht darauf, daß das Ganze so vielmal vermehrt wird, so vielmal alle einzelne Theile desselben vermehrt worden sind.

Nachfolgendes Beyspiel erläutert dieses: —

Beyspiel.

79358642	Multiplicand
6	Multiplicator
12	Einer
24.	Zehner
36..	Hunderter
48...	Tausende
30....	Zehntausende
18.....	Hunderttausende
54......	Einer von Million
42	Zehner v. Million
476151852	Summe oder Prod.

§. 15

Abkürzung dieser Auflösung.

Aus dieser Auflösung entspringt eine

bequeme Abkürzung der Multiplication, welche vorzüglich für das practische Rechnen brauchbar ist. Wenn man z. B. die Zahl 498735 mit 9 multipliciren sollte, so setze man so:

498735 } Factoren.
9 }

4488615 Factum.

Hier sage man: fünfmal neun Einer sind 45 Einer d. h. 4 Zehner und 5 Einer. Da nun die Einer nur unter Einer, die Zehner nur unter Zehner stehen können, so schreibe man die 5 in die Stelle der Einer und behalte die 4 zu dem folgenden Producte aus den Zehnern im Sinne. Nämlich 9mal 3 Zehner sind 27 Zehner; hiezu die 4 Zehner des vorigen Productes addirt, giebt 31 Zehner d. h. 1 Zehner und 3 Hunderter. Diesen 1 Zehner schreibe man wieder unter die Zehner des Multiplicanden und behalte die 3 Hunderte im Sinne, um sie zu den Hunderten, welche aus der Multiplication der 9 in die 7 entstehen, zu setzen. Auf ähnliche Art fahre man fort bis zur höchsten Stelle des Multiplicanden.

§. 16.

Multiplication mehrzifferiger Zahlen.

Um mehrzifferige Zahlen mit einander zu multipliciren, setze man

I. die beyden Factoren mit ihren gleichnamigen Ordnungen unter einander, ziehe einen Strich und multiplicire den ganzen Multiplicanden mit den Einern des Multiplicators.

II. Auf ähnliche Art multiplicire man den Multiplicanden mit allen höhern Ordnungen des Multiplicators, und rücke jedes dieser einzelnen Producte um eine Stelle weiter zur Linken, wie es die untern Beyspiele zeigen. Die Summe dieser Theilproducte ist das verlangte Hauptproduct.

III. Befinden sich in dem Multiplicator mehrere Nullen zwischen seinen Ziffern, so muß jenes Product, welches aus der zuerst auf die Nullen folgenden Ziffer gebildet wird, um so viele Stellen zur Linken vorgerückt werden, als Nullen auf einander folgen. Siehe Beyspiel II.

Die Richtigkeit dieser Regeln leuchtet aus dem nachfolgenden Beyspiele I. sogleich ein, wenn man bedenkt, daß mit 5837 multipliciren soviel heißt, als das 5000fache, das 800fache, das 30fache und das 7fache zusammen addiren.

Beyspiele.

I. 8763942	Factoren.	
5837		
61347594	das 7fache	des Multiplicanden.
26291826	das 30fache	
70111536	das 800fache	
43819710	das 5000fache	
51155129454	Summe oder Hauptfactum.	

II. 9385276	Factoren.	
3005		
46926380	das 5fache	des Multipl.
28155128	das 3000fache	
28202754380	das 3005fache oder verlangte Product.	

§. 17.

Multiplication der Factoren mit angehängten Nullen.

I. Wenn sich an dem einen der beyden Factoren mehrere Nullen befinden, so nehme man auf dieselben anfangs keine Rücksicht, sondern multiplicire die Ziffer wie gewöhnlich und hänge diesem Producte so viele Nullen an, als sich an dem einen Factor befinden, z. B. 8736983 mit 48000 zu multipliciren gibt Folgendes:

```
 8736983
     48000
——————————
 69895864
34947932
——————————
419375184000
```

Es ist nämlich klar, daß mit 48000 multipliciren so viel heißt, als das 48fache nebst dem 1000fachen des Multiplicanden nehmen. Das 48fache hat man durch die gewöhnliche Multiplication erhalten und das 1000fache bekömmt man durch Anhängen dreyer Nullen, weil

hierdurch der Stellenwerth jeder Ziffer 1000mal größer wird.

II. Haben beyde Factoren Nullen angehängt, so multiplicire man anfangs die Ziffer wie gewöhnlich und hänge an das Product die Summe der Nullen beyder Factoren. Wenn man z. B. 7848000 mit 9200 multipliciren sollte, so setze man

7848000 9200	Factoren.
15696 70632	Theilfacta.
72201600000	Product.

Denn 7848000 mit 9200 multipliciren heißt soviel, als 7848 mit 1000 mit 92 mit 100 multipliciren; 1000mal 100 gibt aber 100000.

§. 18

Zeichen der Multiplication.

Das willkührliche Zeichen der Multiplication ist dieses X oder auch ein Punct, welcher zwischen die Factoren gesetzt wird. Z. B. 16 X 4 = 64 heißt soviel, als 16mal 4 ist gleich 64; eben so 8 X 10 X 5 = 400 ist

so viel, als das Product der Zahlen 8, 10 und 5 und gibt die Zahl 400. Sollen mehrere Zahlen, welche durch + und — verbunden sind, mit einer dritten multiplicirt werden, so schließt man sie in eine Parenthese ein; z. B. $(8 + 4 - 6) . 3$ ist so viel, als die Zahl, welche herauskömmt, wenn man zu 8 die 4 addirt, von dieser Summe 6 wegnimmt, und den Rest nun mit 3 multiplicirt. Daher ist $(8 + 4 - 6) . 3 = (12 - 6) . 3 = 6 . 3 = 18$. Ferner ist: $(7 - 3 + 9 + 5) . 8 = (4 + 9 + 5) . 8 = 18 . 8 = 144$ u. s. w.

§. 19.

Division durch eine Ziffer.

Um eine Zahl, welche aus mehreren Ordnungen besteht, durch einen Einer zu dividiren, setze man

I. den Divisor zur Linken des Dividenden und zwischen beyde einen Strich. Siehe die Beyspiele.

II. Vergleicht man nun die höchste Ziffer des Dividenden mit dem Divisor, so ist sie entweder eben so groß, oder größer, oder kleiner. Im ersten Falle schreibe man 1 in den

Quotienten, welcher meist zur Rechten des Dividenden gesetzt wird. Im zweyten Falle untersuche man durch das Einmaleins, wie oft der Divisor von dieser Ziffer abgezogen werden kann und setze diese Zahl in den Quotienten. Im dritten Falle bestimme man, wie oft der Divisor in den zwey höchsten Stellen des Dividenden enthalten ist, wodurch wieder der Quotient entsteht.

III. Nun multiplicire man den Quotienten mit dem Divisor, setze dieses Product, wenn es nur einzifferig ist, unter die höchste; wenn es aber zwey Ziffer hat, unter die zwey höchsten Stellen des Dividenden, und ziehe es davon ab.

IV. Zu dem hierbey etwa gebliebenen Reste nehme man die nächstfolgende Stelle des Dividenden; untersuche, wie oft der Divisor darin enthalten ist, schreibe diese Ziffer in den Quotienten, multiplicire sie mit dem Divisor, ziehe dieses Product von dem Reste nebst der dazu gekommenen Ziffer ab, und fahre mit dieser Arbeit fort, bis alle Ziffer des Dividenden herunter gekommen sind.

V. Sollte in III. kein Rest geblieben und die folgende Ziffer des Dividenden kleiner als der Divisor seyn, so kömmt in den Quotienten eine Nulle, und, nachdem die folgende Ziffer des Dividenden herunter genommen ist, folgt man den obigen Regeln wieder.

Die Richtigkeit dieser Regeln wird an einem Beyspiele deutlich. Wenn z. B. die Zahl 83574 durch 6 zu dividiren ist, so geschieht dieses, indem alle Theile dieser Zahl mit 6 getheilt werden. Nun ist aber 83574 = 80000 + 3000 + 500 + 70 + 4; daher ist es einerley, ob man diese Summe, oder die ganze Zahl durch 6 dividirt. Man sage daher: 6 in 80000 ist 10000mal enthalten, 6mal 10000 sind 60000, und diese von 80000 abgezogen, lassen 20000 zum Reste, worin der Divisor nicht mehr nach Zehntausenden, wohl aber nach niedrigern Ordnungen enthalten ist. Weil nun der Dividend noch 3000 hat, so setze man sie zum Reste 20000, welches die Summe 23000 gibt. Diese wieder mit 6 getheilt, geben 3000 zum zweyten Theile des Quotienten, welcher mit dem Divisor multi-

plicirt 18000 gibt, und, von 23000 weggenommen, 5000 übrig läßt, worin der Divisor nicht mehr nach Tausenden enthalten ist. Da aber der Dividend noch 5000 enthält, so bilden diese mit dem Reste 500 die Summe 5500, welche, mit 6 dividirt, 900 zum dritten Theile des Quotienten gibt. Das Product aus ihm in den Divisor ist 5400 und der Rest 100, worin der Divisor nicht mehr nach Hunderten enthalten ist. Weil aber der Dividend noch 70 enthält, so dividire man die Summe 170 von Neuem durch 6, wodurch 20 als Quotient entsteht, welcher, mit 6 multiplicirt, 120, und zum Reste 59 gibt. Kommen hierzu die 4 Einer des Dividenden, so entsteht 34, worin der Divisor 6 gerade 9mal enthalten ist. Folglich ist 9 der letzte Theil des Quotienten.

Nach diesem war der Divisor 10000, 3000mal, 900mal 20mal und 9mal d. h. 13929mal im Dividenden enthalten und 13929 ist der gesuchte Quotient. Nachstehendes Beyspiel erläutert dies.

Divisor Dividend

6 | 83574 |
6 | 80000 | 10000 I. Theil des Quotient.
60000

addirt { 20000 1ter Rest.
3000 II. Theil des Dividenden.

6 | 23000 | 3000 II. Theil des Quotient.
18000

addirt { 5000 2ter Rest.
500 III. Theil des Dividenden.

6 | 5500 | 900 III. Theil des Quotient.
5400

addirt { 100 3ter Rest.
70 IV. Theil des Dividenden.

6 | 170 | 20 IV. Theil des Quotient.
120

addirt { 50 4ter Rest.
4 V. Theil des Dividenden.

6 | 54 | 9 V. Theil des Quotienten.
54

00

Setzt man hier die einzelnen Theile des Quotienten zusammen, so wird er $= 10000 + 3000 + 900 + 20 + 9 = 13929$.

§. 20.

Division mit zwey Ziffern.

Enthält der Divisor zwey Ziffer, so vergleiche man die zwey höchsten Stellen des Dividenden mit ihm. Sind sie ihm gleich, so kömmt 1 in den Quotienten. Ist der Divisor kleiner, so wähle man einstweilen als Quotient eine Ziffer, welche, nach dem Einmaleins, der Quotient aus der höchsten Ziffer des Divisors in die höchste des Dividenden ist. Mit dieser multiplicire man den ganzen Divisor, so ist, wenn das Product von den zwey höchsten Stellen des Dividenden abgezogen werden kann, der angenommene Quotient richtig. Ist aber dieses Product größer, so muß man den Quotienten um eine Einheit so lange vermindern, bis dieser Abzug geschehen kann. Ist aber der Divisor größer, als die zwey höchsten Stellen des Dividenden, so nehme man drey Ziffer aus ihm, vergleiche den Divisor damit und bestimme nach dem Vorigen den Quotienten. Nach diesen Regeln werden nun alle folgende Ziffer des Quotienten gefunden.

Beyspiele.

I. Divisor. Dividend. Quotient.

```
12 | 52,5384 | 43782
     48
     --
      45
      36
      --
       93
       84
       --
        98
        96
        --
         24
         24
         --
         00
```

II. Divisor. Dividend. Quotient.

```
358 | 2662,90782 | 743829
      2506
      ----
      1569
      1432
      ----
       1370
       1074
       ----
        2967
        2864
        ----
         1038
          716
         ----
         3222
         3222
         ----
         0000
```

Bestände der Divisor aus 4, 5, 6 oder mehreren Ziffern, so ist es rathsam, sich zuvor in einem Täfelchen alle Vielfache dieses Divisors bis zum Neunfachen zu verfertigen, um bey Bestimmung des Quotienten immer sicher zu Werke zu gehen, wie folgendes Beyspiel zeigt:

	Divisor.	Dividend.	Quotient.
1faches	38572	98768,312493	2560622
2 —	77144	77144 zweyfaches	
3 —	115716	216243	
4 —	154288	192860 fünffaches	
5 —	192860	233831	
6 —	231432	231432 sechsfaches	
7 —	270004	23882	
8 —	308575	0 nullfaches	
9 —	347147	239924	
		231432 sechsfaches	
		84929	
		77144 zweyfaches	
		77853	
		77144 zweyfaches	
		709 Rest.	

Dieser Rest heißt soviel, als die Zahl 709 soll noch durch 38572 getheilt werden. Daß der hieraus entstehende Quotient kleiner als 1

seyn müsse, erkennt man daraus, daß der Dividend auch 38472 seyn müßte, um 1 zum Quotienten zu geben. Größen, welche kleiner als 1 sind, nennt man Brüche, von deren Entstehung und Behandlung das vierte und fünfte Buch spricht.

§. 21.

Zeichen der Division.

Das willkührliche Zeichen der Division ist ein Doppelpunct :, der zwischen den Dividenden, welcher vorhergeht, und den Divisor, welcher nachfolgt, gesetzt wird. z. B. 60 : 5 = 12 heißt: 60 dividirt durch 5 ist gleich 12; oder 144 : 24 = 6; 2648 : 4 = 662 u. s. w. Eine andere Art, die Division zu bezeichnen, wird in dem fünften Buche vorkommen.

§. 22.

Probe der Multiplication und der Division.

Man sagt gewöhnlich, daß die Multiplication und die Division einander wechselseitig

zu Proben dienen. Wenn man z. B. 382597 durch 263 multiplicirt, woraus das Product 100623011 entspringt, so muß, wenn dasselbe mit 263 dividirt wird, zum Quotienten 382597 entstehen; so wie der Quotient 263 werden muß, wenn man das Factum mit 382597 dividirt. — Soll dagegen die Zahl 2157078 durch 46 dividirt werden, so entsteht 46893 zum Quotienten, und nun macht man die Probe dadurch, daß das Product aus 46 in 46893 den Dividenden 2157078 wieder hervorbringen muß. Die wirkliche Ausführung dieser Proberechnungen ist eine lehrreiche Uebung für Anfänger.

§. 23.

Bequeme Division mit einer Ziffer.

Wenn der Divisor einzifferig ist, so kann die Division dadurch sehr kurz verrichtet werden, daß man die Producte aus den Stellen des Quotienten in den Divisor nur in Gedanken bildet, dieselbe eben so von den gehörigen Ziffern des Dividenden wegnimmt, und so bis zum Ende fortfährt; z. B:

Divisor.	Dividend.	Quotient.
6	448992	74832

Man sage: 6 in 44 geht 7mal; 6mal 7 sind 42, welche von 44 abgezogen, 2 übrig lassen. Diese 2, zur Linken der 8 gestellt, gibt 28. Man sage nun wieder: 6 in 28 geht 4mal; 4mal 6 sind 24 und diese, von 28 weggenommen, lassen 4 übrig u. s. w. bis zum Ende.

§. 24.

Division mit 1 nebst mehreren Nullen.

Wenn eine gegebene Zahl durch 1, woran mehrere Nullen hängen, dividirt werden soll, so schneide man von der Rechten zur Linken so viele Ziffer des Dividenden ab, als Nullen am Divisor sind. Die nicht abgeschnittenen Ziffer des Dividenden bilden den Quotienten, die abgeschnittenen aber den Rest, wie in §. 21.

Da nämlich jede Ziffer, welche der andern zur Rechten steht, nach ihrem Stellenwerthe zehnmal kleiner ist, als diese, so rückt jede Ziffer einer Zahl in die nächstniedrigere Ordnung herab d. h. sie wird 10mal kleiner,

wenn man die niedrigste Ziffer abschneidet. Daher wird durch das Abschneiden einer Ziffer die Zahl zehnmal kleiner u. s. w. z. B. 86854 : 10 = 8685 nebst dem Reste 4; 973226 : 100 = 9732 nebst dem Reste 26; 17336 : 1000 = 17 nebst dem Reste 336 u. s. w.

§. 25.

Division mit Nullen an einer oder an beyden Zahlen.

Wenn der Divisor in den niedrigsten Stellen Nullen enthält, so schneide man vom Dividenden eben so viele Stellen von der Rechten zur Linken ab, als Nullen da sind, dividire nun mit den Ziffern des Divisors wie gewöhnlich und setze die vom Dividenden abgeschnittenen Ziffer neben den sich am Ende der Division etwa ergebenden Rest z. B:

Divisor.	Dividend.	Quotient.
12(00	94837(25	7903
	84	
	108	
	108	
	37	
	36	
	1 zu diesem Reste die	

abgeschnittenen 25 gesetzt, gibt 125, welche eigentlich noch durch 1200 getheilt werden sollen.

Sind sowohl am Dividenden, als am Divisor mehrere Nullen, so werden so viele beyderseits ausgestrichen, als der Divisor hat; z. B: 87395000: 1000 = 87395; oder 389000: 100 = 3890; oder 738000: 10000 = 738: 10 = 73, nebst 8 als Rest.

Wäre der Divisor eine mehrzifferige Zahl mit Nullen, so müßte man, nach abgeschnittenen Nullen, mit den Ziffern nach den vorhergehenden Regeln dividiren.

Drittes Buch.

Von den benannten Zahlen.

§. 1.

Begriff der benannten Zahlen.

Der Werth einer Zahl hängt nicht blos von der Menge, sondern auch von der Größe ihrer Einheiten ab. Solche Zahlen bey welchen Beydes bestimmt ist, nennt man benannte Zahlen; z. B. 3 Gulden, 18 Pfunde, 12 Meilen u. s. w. Die Rechnung mit benannten Zahlen bedarf im Wesentlichen keiner neuen Regeln, nur muß man die sogenannte Reductions-Zahl d. h. eine Zahl kennen, welche andeutet, wieviele Einheiten der niedrigen Werthart eine Einheit der nächst höhern bilden. So ist z. B. bey Lothen und Pfunden

die Reductions-Zahl 32; bey Gulden u. Kreutzern aber 60, weil 32 Lothe ein Pfund, und 60 Kreutzer einen Gulden betragen. Nachfolgende Tabelle enthält eine kleine Sammlung von den im gemeinen Leben am häufigsten vorkommenden benannten Zahlen.

§. 2.

Tabelle über einige benannte Zahlen.

I. Gemeines Gewicht.

Ein Centner hat . . 100 Pfunde,
Ein Pfund hat . . . 32 Lothe,
Ein Loth hat . . . . 4 Quentchen,

II. Deutsches Apotheker Gewicht.

Ein Pfund ℔ hat . 12 Unzen,
Eine Unze ℥ hat . . 8 Drachmen,
oder 24 Lothe,
Eine Drachma ʒ hat . 3 Scrupel,
Ein Scrupel ℈ hat . 20 Gran,

III. Geldsorten.

Eine Caroline enthält . . 11 Gulden,
Ein Gulden enth. . . . . 60 Kreutzer,
Ein Kreutzer enth. . . 4 Pfennige,

IV. Zeiteintheilung.

Ein Jahr besteht aus . . 12 Monaten,
Ein Monat besteht aus 28 od. 29 od. 30 od. 31 Tagen,
Ein Tag besteht aus . . 24 Stunden,
Eine Stunde best. a. . . 60 Minuten,
Eine Minute best. a. . . 60 Secunden,

V. Gemeines Längenmaas.

Eine deutsche Meile hat 24000 Rh Sch.
Ein Rh. Schuh hat . . . 12 Zolle,
Ein Zoll hat . . . . . 12 Linien,

IV Papiermaas.

Ein Ballen zählt . . . 10 Ries,
Ein Ries zählt . . . . 20 Buch
Ein Buch zählt . . . . 24 Bogen,
Ein Buch (Druck Papier) z. 25 Bogen

§ 3.

Addition benannter Zahlen.

Um benannte Zahlen zu addiren, setze man sie nach ihrer Gleichartigkeit so unter einander, daß die Einer unter Einern, die Zehner unter Zehnern und s. f. stehen, addire alle Zahlen der niedrigsten Werthart, dividire die Summe durch

die Reductionszahl, setze den etwaigen Rest, oder, wenn keiner bleibt, eine Nulle an die gehörige Stelle und behalte den Quotienten im Sinne. Sodann addire man diesen Quotienten und alle in der nächst höhern Gattung gegebene Zahlen zusammen, dividire diese Summe wieder mit der gehörigen Reductionszahl, und fahre auf diese Weise bis zum höchsten Werthe fort, wo denn die sich ergebende Summe, ohne fernere Reduction, angeschrieben wird.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht theils auf der Addition ganzer Zahlen, theils auf dem durch die Reductionszahl bestimmten Verhältnisse der benannten Zahlen.

Beyspiele. I.

Centner.	Pfunde.	Lothe.	Quentchen.
178	85	18	3
4793	37	25	2
508	23	12	3
89	79	28	1
5570	36	21	1

Zur Erläuterung diene Folgendes. Da die

Summe aller Quentchen 1 Loth bilden, mit 4 dividirt werden. Der Quotient gibt 2 Lothe und 1 Quentchen zum Reste. Jene 2 Lothe werden zu den folgenden Lothen addirt und geben zur Summe 85, woraus man, durch die Division mit 32, 2 Pfunde und einen Rest von 21 Lothen erhält. Die 2 Pfunde addirt man wieder zu den vorhandenen Pfunden u. s. f.

II.

Jahre.	Monate.	Tage.	Stunden.	Minut.	Sec.
137	10	28	18	37	58
84	9	18	23	45	38
206	11	0	16	36	25
430	7	18	11	0	1

§. 4.

Subtraction in benannten Zahlen.

Um benannte Zahlen von einander abzuziehen, schreibe man die größere oberhalb der kleinern, und nach gleichartigen Ordnungen, und ziehe einen Strich. Sind nun alle einzelne Zahlen der abzuziehenden kleiner, als

die darüber stehenden, so subtrahire man sie von ihnen und setze den Rest unter den Strich. Siehe Beyspiel I. Soll aber eine größere Zahl von einer kleinern subtrahirt werden, so entlehne man bey der nächst höhern Gattung eine Einheit, verwandle sie in Einheiten der nächst niedrigern Art, zähle die hier vorhandenen Einheiten dazu und verrichte nun den Abzug von dieser Summe. Auf ähnliche Weise verfahre man bey allen folgenden Ordnungen.

Auch die Richtigkeit dieser Regeln ist von selbst einleuchtend.

Beyspiele. I.

Gulden.	Kreutzer.	Pfennige.
7893	23	2
965	18	1
6928	5	1

II.

Centner.	Pfunde.	Lothe.	Quentchen.
1884	85	18	1
958	94	23	3
925	90	26	2

Von 1 Quentchen können hier keine 3 weggenommen werden; daher lehnt man ein Loth, welches mit diesem einen Quentchen 5 Quentchen beträgt, wovon 3 abgezogen 2 Quentchen übrig lassen. Nun sollen 23 Lothe von 17 Lothen subtrahirt werden. Man borgt daher ein Pfund, welches 32 Lothe beträgt, setzt die vorhandenen 17 Lothe dazu, so kann man von der Summe 49 die 23 Lothe abziehen u. s. w.

§. 5.

Andere Anwendungen der Addition.

I.

Gustav Adolph (König von Schweden) wurde am 9. December des Jahrs 1594 geboren, und erreichte ein Alter von 37 Jahren, 10 Monaten und 28 Tagen. An welchem Datum ist er gestorben.

Offenbar müssen hier die zwey gegebenen Zeiten addirt werden; nämlich:

Jahre.	Monate.	Tage.	
1593	11	8	
37	10	28	
1630	21	36	Summe.

Um diese Summe auf den gehörigen Tag des Kalenders zu bringen, bedenke man, daß die erhaltenen 21 Monate soviel als 1 Jahr und 9 Monate betragen. Gustav Adolph ist demnach im Jahre 1631 nach 9 Monaten und 36 Tagen gestorben. Nun ist aber der neunte Monat der September und der October hat 31 Tage. Folglich ist er nach 9 Monaten und 31 + 5 Tagen d. h. am fünften November des Jahrs 1632 gestorben, weil die 10 Monate und 5 Tage nach dem Jahre 1631, folglich in das Jahr 1632 fallen.

II.

Es hat Jemand am 11. Januar des Jahrs 1782 Geld geliehen, welches nach 3 Jahren 4 Monaten und 24 Tagen zurückbezahlt worden ist. Auf welchen Datum fiel die Rückzahlung. Die Rechnung ist diese:

Jahre.	Monate.	Tage.	
1781	0	10	
3	4	24	
1784	4	34	Summe.

Die Zahlung wurde also nach dem Jahre 1784, nach dem 4ten Monate (April), nach 34 Tagen; folglich, da der May 31 Tage hat, nach dem 3. Junius, somit am 4. Junius des Jahrs 1785 geleistet.

§. 6.

Subtractions-Anwendungen.

I.

Es ist Jemand im Jahr 1770 am 11. März des Abends um 8 Uhr gestorben, und wurde geboren im Jahr 1701 den 8. Februar Morgens um 7 Uhr. Wie alt war der Verstorbene?

Man erkennt sogleich, daß von dem Datum des Absterbens jener der Geburt subtrahirt werden muß, um das Alter zu finden. Dies gibt Folgendes:

Jahre.	Monate.	Tage	Stunden.
1769	2	10	20
1700	1	7	7
69	1	3	13 Differenz.

Der Verstorbene hat daher 69 Jahre, 1 Monat, 3 Täge und 13 Stunden erlebt.

II.

Es hat Jemand am 11. Januar des Jahrs 1782 Geld geliehen und dasselbe am 4. Juni des Jahrs 1785 zurückbezahlt. Wie lange hatte er dieses Geld benützt?

Offenbar muß hier vom spätern Datum der frühere abgezogen werden. Dieses gibt:

Jahre.	Monate.	Tage.
1784	5	3
1781	0	10
3	4	24 Differenz.

Hier sollten 10 Tage von 3 abgezogen werden, was an sich unmöglich ist. Daher müssen vom 5. Monate d. h. vom May, der 31 Täge hat, diese 31 Tage geborgt werden u. s. w. Die geliehene Geldsumme ist daher 3 Jahre 4 Monate und 24 Tage benützt worden.

§. 7.

Multiplication einer benannten Zahl mit einer unbenannten.

Um eine benannte Zahl mit einer unbenannten zu multipliciren, multiplicire man die niedrigste Stelle von jener mit dieser, untersuche durch die Division mit der Reductionszahl, wie viele Einheiten der nächst höhern Werthart im Producte enthalten sind, und schreibe den Rest, oder, wenn keiner bleibt, eine Nulle an die gehörige Stelle unter den gezogenen Strich. Nun multiplicire man die nächst höhere benannte Zahl mit dem Multiplicator, addire den vorigen Quotienten dazu, dividire die Summe mit der gehörigen Reductionszahl und fahre auf ähnliche Weise bis zur höchsten Stelle fort.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird durch folgendes Beyspiel klar.

I.

Gulden.	Kreutzer	Pfennige.	
3785	34	3	} Factoren.
		18	
68140	25	2	Product.

Hier geben 18mal 3 Pfennige 54 Pfennige d. h. durch die Division mit 4, 13 Kreutzer nebst 2 Pfennigen zum Reste. Nun betragen 18mal 24 Kreutzer so viel als 612 Kreutzer, welche, mit den vorigen 13 Kreutzer, zur Summe 625 Kreutzer oder, durch die Division mit 60, 10 Gulden und 25 Kreutzer betragen, welche letztere als Rest bleiben. Endlich sind 18mal 3885 Gulden soviel als 68130 Gulden, welche, mit den vorigen 10 Gulden, eine Summe von 68140 Gulden geben.

II.

Centner.	Pfunde.	Lothe.	Quentchen.	
783	56	18	2	Factoren
			43	
33693	32	12	2	Product.

Vorige Aufgaben können auch dadurch aufgelößt werden, daß man alle höhere Werthärten des Multiplicanden in dessen niedrigste Werthart verwandelt, dieses Ganze mit dem Multiplicator vermehrt und nun das erhaltene Product, mit den gehörigen Reductions-

zahlen, wiederum auf die höhern Werthärten reducirt.

Auch bemerke man, daß bey der Multiplication in benannten Zahlen der Multiplicator jedesmal eine reine Zahl seyn müsse; denn es ist widersprechend, eine benannte Zahl mit einer benannten zu multipliciren. So würde z. B: 8 Gulden mit 3 Gulden multipliciren soviel heißen, als jene 8 Gulden 3 Guldenmal nehmen, was keinen verständigen Sinn hat.

§. 8.

Division einer benannten Zahl durch eine unbenannte.

Wenn eine benannte Zahl durch eine unbenannte Zahl dividirt werden soll, so dividire man mit dem Divisor in ihre höchste Werthart und setze den Quotienten neben einen Strich, wie im ersten Beyspiele. Den Rest verwandle man, durch Multiplication mit der Reductionszahl, in Einheiten der nächst niedrigern Art, zähle die vorhandenen dazu, dividire diese Summe wiederum mit dem

Divisor, und setze dieses Verfahren bis zur niedrigsten Stelle fort.

Auch diese Vorschrift wird durch Beyspiele erläutert.

I.

Es sollen 7843 Gulden 54 Kr. und 3 Pf. unter 9 Personen gleich vertheilt werden. Wie viel bekömmt Einer?

Divisor. Gulden. Kr. Pf.
9| 7843 54 3 Dividend.
9| 7843 (871 Quot. aus d. Gulden.
72
64
63
13
9
4 Rest von Gulden
60
240 in Kr. verwandelt
54 die gegebenen Kr. addirt

```
9 | 294 | 32 Quot. aus d. Kr.
    27
    ——
     24
     18
     ——
      6 Rest aus den Kr.
      4
     ——
     24 in Pfennig verwandelt
      3 die gegeb. Pfen. addirt
     ——
 9 | 27 | 3 Quotient aus d. Pf.
     27
     ——
     00
```

Daher bekömmt jede Person 871 Gulden, 32 Kr. und 3 Pf.

II.

Man soll 4389 Centner, 85 Pfunde, 18 Lothe und 2 Quentchen in 16 gl. Th. theilen. Wie groß ist jeder?

```
     Centner. Pf. Loth. Quent.
16 | 4389    85   18    2
16 | 4389 | 274 Quotient aus den Centn.
     32
    ———
     118
     112
    ———
       69
       64
    ———
        5 Rest von Centnern.
      100
    ———
      500 in Pfunde verwandelt
       85 die gegeb. Pfunde addirt
```

```
16 | 585 | 36 Quotient aus den Pf.
     48
     105
      96
       9 Rest aus Pf.
      32
     288 in Lothe verwandelt
      18 die gegebene Lothe addirt
16 | 306 | 19 Quotient aus Lothen.
     16
     146
     144
       2 Rest von Lothen
       4
       8 in Quentchen verwandelt
       2 die vorhandenen Quent. addirt
16 | 10 |
```

Quotient weniger als 1 Quentchen, weil nur 10 Quentchen unter 16 zu vertheilen sind. Auch diese Divisionsaufgaben können dadurch aufgelößt werden, daß alle Wertharten des Dividenden in die niedrigste Gattung verwandelt, nunmehr mit dem Divisor dividirt und sodann wiederum, durch Hülfe der Reductionszahlen, in die höhern Werthe verwandelt werden; Uebungen, welche den Anfängern sehr zu empfehlen sind.

Noch bemerke man, daß bey der Division sowohl der Divisor, als auch der Dividend benannte Zahlen seyn können, wenn sie nur unter sich gleichartig sind. Der Quotient wird hier eine reine Zahl. Offenbar sind z. B: 3 Gulden in 24 Gulden 8mal, 5 Pfunde in 60 Pfund 12mal enthalten u. s. f.

Viertes Buch.

Von den Decimalbrüchen.

§. 1.

Entstehung der Decimalbrüche.

Unser zehntheiliges Zahlensystem beruht auf zwey willkührlichen Annahmen:

I. Man zähle auf zehn, und steige in den folgenden Ordnungen immer zum zehnfach Höheren empor.

II. Wenn mehrere Ziffer nebeneinander stehen, so hat jede, welche sich unmittelbar zur Linken der andern befindet, vermöge ihrer Stelle, einen zehnfach höhern, die die unmittelbar zur Rechten stehende aber einen zehnfach kleinern Werth.

Wenn man nun zur Rechten der Einer einer gegebenen Zahl eine Ziffer setzt, und dasselbige Gesetz gelten läßt, so hat diese Stelle einen zehnfach kleinern Werth als die Einer. Nun heißt aber der zehnte Theil von Eins ein Zehntel, folglich ist dies die Stelle der Zehntel. Wird noch eine Ziffer zur Rechten dieser Zehntel gesetzt, so muß ihr Stellenwerth wiederum zehnmal kleiner werden. Nun ist aber der zehnte Theil von einem Zehntel offenbar der hunderte Theil der Einheit, oder ein Hunderttel; daher ist diese neue Stelle jene der Hunderttel. Auf gleiche Weise entstehen die folgenden Stellen, welche die Namen: Tausendtel, Zehntausendtel, Hunderttausendtel, Milliontel, u. s. f. erhalten.

Solche Zahlen, welche zehnmal, hundertmal u. s. w. kleiner als Eins sind, heißen Decimalbrüche oder zehntheilige Brüche.

Dieses Entstehen und Benennen der Decimalbrüche kann nachfolgendes Beyspiel aufklären.

4	8	7	5	1	2	9,	6	4	3	8	7	5
Millionen	Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einer	Zehntel	Hunderttel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel	Milliontel

§. 7.

Bezeichnung der Decimalbrüche.

I. Da bey mehreren nebeneinander stehenden Ziffern die Ordnungen der Decimalbruchstellen bestimmt sind, sobald man weiß, welche Ziffer sich auf die Einer bezieht, so bezeichnet man diese Stelle der Einer mit einem daneben gesetzten Comma, welches der Einerstrich heißt. So ist 354,7384 soviel als: dreyhundert vier und fünfzig Einer, sieben Zehntel, drey Hunderttel, acht Tausendtel und vier Zehntausendtel. 87,3005 ist soviel als: sieben und achtzig Einer, drey Zehntel (kein Hunderttel, kein Tausendtel) funf Zehntau-

sendtel. 6,000004 heißt: sechs Einer, und vier Milliontel.

II. Wenn nebst den Decimalbrüchen keine ganze Decimalzahlen gegeben sind, so schreibe man dahin, wo sonst die Einer ständen, eine Nulle, setze ihr zur Rechten den Einerstrich und lasse nun die Decimalbrüche folgen. So heißt z. B: 0,643 soviel als: Keine Einer, sechs Zehntel, vier Hunderttel, drey Tausendtel. Ferner ist: 0,07 soviel als: sieben Hunderttel u. s. f.

§. 3.

Allgemeine Folgerungen.

I. Aus dem Bisherigen wird klar, daß 1 Zehner 10mal größer als 1, und 1 Zehntel 10mal kleiner als 1 ist. Desgleichen ist 1 Hunderter 100mal größer, 1 Hunderttel aber 100mal kleiner als 1; ferner 1 Tausendter 1000mal größer, 1 Tausendtel aber 1000mal kleiner als 1 u. s. w.

II. Gleichwie 10 Einer einen Zehner, 10 Zehner einen Hunderten, 10 Hunderte einen Tausenden u. s. f. bilden, so bilden auch 10

Tausendtel ein Hunderttel, 10 Hunderttel ein Zehntel, 10 Zehntel einen Einer.

III. So wie ein Tausendter 10 Hunderte, ein Hunderter 10 Zehner, ein Zehner 10 Einer beträgt, so enthält auch ein Einer 10 Zehntel, ein Zehntel 10 Hunderttel, ein Hunderttel, 10 Tausendtel u. s. f.

IV. Umgekehrt ist 1 Tausendtel der 10te Theil von 1 Hunderttel, 1 Hunderttel der 10te Theil von 1 Zehntel, 1 Zehntel der 10te Theil von 1 Einer, 1 Einer der 10te Theil von 1 Zehner, 1 Zehner der 10te Theil von 1 Hunderter u. s. f.

V. So wie z. B. der zehnte Theil vom Zehner oder der hunderte Theil vom Hunderter oder der tausende Theil vom Tausenden u. s. w. einen Einer bilden, so betragen auch zehn Zehntel, oder 100 Hunderttel, oder 1000 Tausendtel einen Einer.

VI. Auch bilden z. B. 100 Zehntel einen Zehner, 1000 Zehntel einen Hunderten, 10000 Zehntel einen Tausenden u. s. f., ferner 100 Zehntausendtel ein Hunderttel; 1000 Hunderttel einen Zehner; 10000 Hun-

derttel einen Hunderten, 100000 Hunderttel einen Tausenden u. s. f.

§. 4.
Rechnungsarten mit Decimalbrüchen.

Da die Decimalbrüche Zahlen sind, weil sie Vielheiten der durch die Decimalbruchstellen bestimmten Einheiten enthalten, so haben auch die bekannten vier Rechnungsarten mit diesen zehntheiligen Brüchen Statt. Da diese Brüche nach demselbigen Gesetze entstehen, nach welchem die ganzen Decimalzahlen gebildet werden, so treten bey diesen vier Fundamentalrechnungen auch im Allgemeinen die nämlichen Regeln ein, wie bey der Rechnung in ganzen Zahlen, und eben hierin wird sich der große Vorzug der Rechnung mit Decimalbrüchen vor jener in gemeinen Brüchen zeigen.

§. 5.
Reine und gemischte Decimalbrüche.

Decimalbrüche heißen reine, wenn sie keine ganze Decimalzahlen, sondern nur

Decimalbruchtheile enthalten; z. B: 0,684; 0,039; 0,0008; 0,7634. Gemischte Decimalbrüche aber sind jene, welche theils aus ganzen Decimalzahlen, theils aus solchen Bruchtheilen bestehen; z. B: 87,6423; 640,38; 17584,0064; 3,087 u. s. w.

§. 6.

Addition der Decimalbrüche.

Um mehrere gegebene Decimalbrüche zusammen zu addiren, setze man diese Brüche

I. so unter einander, daß die Stellen der Einer, welche entweder mit einer Ziffer oder mit einer Nulle ausgefüllt sind, in lothrechter Reihe stehen. Siehe die Beyspiele.

II. Nachdem ein wagrechter Absönderungsstrich gezogen worden ist, fange man bey der niedrigsten Stelle die Addition so an und führe sie gerade so von der Rechten zur Linken fort, als wenn es ganze Decimalzahlen wären.

III. Schneidet man endlich an der hierdurch erhaltenen Zahl von der Rechten zur

Linken so viele Ziffer ab, als jene aus den zu addirenden Zahlen Bruchstellen hat, welche aus den meisten besteht, so entspringt die verlangte Summe.

Die Regel I. folgt aus dem Grundsatze, daß nur gleichartige Größen zusammen addirt werden können. Die Regel II. fließt aus §. 4, und die Richtigkeit von III. erkennt man daher, daß die niedrigste Ziffer der Summe von derselbigen Art seyn muß, als von welcher die niedrigste Stelle jener der zu addirenden Zahlen ist, welche die meisten Decimalbruchstellen enthält.

Beyspiele.

I. 0,6281 } zu addirende Brüche.
0,2317

0,8598 Summe.

II. 0,8354621 } zu addirende Brüche.
0,68733

1,5227921 Summe.

III. 384,627 } zu addirende Brüche.
72,03
10,7234

467,3804

IV.	3,602	zu addirende Brüche.
	264,53102	
	0,64	
	13,0038	
	7,6	
	289,37682	Summe.

§. 7.

Erläuterungen darüber.

I. Daß in den Beyspielen II. III. IV. die zu addirenden Brüche nicht aus gleichvielen Decimalbruchstellen bestehen, darf dem Anfänger nicht auffallend seyn, da man zur Rechten dieser Decimalbruchstellen so viele Nullen setzen kann, als man will, ohne den Werth des Decimalbruchs zu verändern. So ist z. B: 17,643 = 17,6430 = 17,6430000 u. s. f., weil diese Nullen zur Rechten die Abwesenheit der folgenden Decimalbruchstellen in diesen Ordnungen andeuten.

II. Da aber 17,643 soviel heißt, als 17 Einer nebst 643 Tausendtel, so ist 17,6430 soviel, als 17 Einer und 6430 Zehntausendtel und 17,6430000 soviel, als 17 Einer nebst

6430000 Zehnmilliontel u. s. w. Das Beyspiel in IV. wäre also folgendes:

3,60200	zu addirende Brüche, welche durch das Anhängen der Nullen in Hunderttausendtel verwandelt worden sind.
264,53102	
0,64000	
13,00380	
7,60000	
289,37682 Summe.	

§. 8.

Subtraction der Decimalbrüche.

Um die Subtraction in Decimalbrüchen zu verrichten, bemerke man:

I. Wenn der kleinere Bruch, er sey ein reiner oder ein gemischter, so viele Decimalbruchstellen als der größere hat, so setze man ihn so unter diesen, daß die gleichartigen Stellen unter einander stehen, ziehe einen Strich, vollbringe die Subtraction gerade so, als wenn es ganze Zahlen wären, und schneide nun von der Rechten zur Linken so viele Bruchstellen ab, als jede der beyden Zahlen hat. Siehe die Beyspiele I. II. und III.

II. Hat der kleinere Bruch weniger Bruchstellen als der größere so setze man sie nach 1.

unter einander, schreibe die Ziffer, welche in dem größern Bruche mehr, als in dem kleinern sind, unverändert unter den gezogenen Querstrich und verfahre im Uebrigen nach I. Siehe Beyspiele IV. und V.

III. Wenn in der kleinern Zahl mehr Bruchstellen als in der größern vorkommen, so schreibe man sie gehörig (nach I.) unter einander, denke sich die in der größern Zahl noch fehlenden Stellen mit Nullen ausgefüllt, subtrahire so, als wären es ganze Zahlen und schneide in der Summe von der Rechten zur Linken so viele Stellen ab, als Bruchstellen in der kleinern Zahl sind. Siehe Beyspiel VI. und VII.

IV. Soll ein reiner oder gemischter Decimalbruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden, so denke man sich zur Rechten an die Zahl so viele Nullen, als der abzuziehende Bruch Decimalbruchstellen hat, subtrahire wie in ganzen Zahlen und bestimme das Comma nach der Zahl der Bruchstellen des Subtrahenden wie in III. Siehe Beyspiele VIII. IX. und X.

Die Richtigkeit der I. Regel folgt aus §. 4; die Regel II. fließt aus §. 7, so wie auch die Regeln III. und IV.

Beyspiele.

I.	0,8735 größerer Bruch.	0,4213 kleinerer Bruch.	0,4522 Rest.
II.	687,3496	49,1305	638,2191 Rest.
III.	74,30041	73,87963	0,42078 Rest.
IV.	0,8732654	0,39287	0,4803954 Rest
V.	65,8725	9,76	56,1125 Rest.
VI.	0,7319000	0,2617825	0,4701175 R.
VII.	39,70000	8,39862	31,30138 R.
VIII.	345,00000	0,78524	344,21676 R.
IX.	86,0000	34,8345	51,1655 Rest.
X.	1,00000	0,64329	0,35671 Rest.

Auch bey der Subtraction in Decimalbrüchen kann die Probe durch die Addition so gemacht werden, daß die Summe aus der kleinern Zahl und dem Reste der größern gleich seyn muß. Die Ausführung dieser Proberechnungen ist Anfängern sehr zu empfehlen. Desgleichen kann auch die Subtraction zur Probe der Addition dienen.

§. 9.

Multiplication eines Decimalbruchs mit 10.

Wenn man die Ziffer eines reinen oder vermischten Decimalbruchs unverändert läßt, aber den Einerstrich um eine Ziffer zur Rechten fortrückt, so ist der ganze Bruch hierdurch zehnmal größer d. h. mit 10 multiplicirt worden.

Denn da das Einer-Comma in dem reinen Decimalbruche die Stelle bezeichnet, wo sich die Zehntel, Hunderttel, Tausendtel u. s. f. befinden, so ist klar, daß durch das Vorrücken dieses Strichs die vorigen Zehntel nun zu Einern, die vorigen Hunderttel nun zu Zehntel, die vorigen Tausendtel nun zu Hunderttel werden u. s. f., wodurch jede Decimalbruchstelle einen zehnmal höhern Werth erhält; folglich auch der ganze Bruch, dessen Theile jene Bruchstellen sind.

Ist der Decimalbruch ein gemischter, so ist ebenfalls klar, daß die vorigen Einer nun zu Zehnern, die vorigen Zehner nun zu Hun-

derten u. s. f. alle folgende höhere Stellen zehnfach erhöhet werden.

Beyspiele. Daher ist 0,764 X 10 = 7,64; ferner 0,0835 X 10 = 0,835; und 87,6304 X 10 = 876,304; auch 8,0006 X 10 = 80,006 u. s. f.; denn wenn man anstatt 0,764 so schreibt: 7,64, so sind die vorigen 7 Zehntel nun 7 Einer, die 6 Hunderttel nun 6 Zehntel, und die 4 Tausendtel nunmehr 4 Hunderttel geworden, wodurch der ganze Bruch 7,64 offenbar zehnmal größer als 0,760 geworden ist.

§. 10.

Folgerungen daraus.

I. Wenn man also einen gegebenen Decimalbruch mit 10 multipliciren soll, so geschieht dieses, indem der Einerstrich um eine Stelle von der Linken zur Rechten fortgerückt wird.

II. Ebenso klar ist nun auch, daß man den zehntheiligen Bruch mit 100 multiplicirt, wenn der Einerstrich um zwey Stellen zur Rechten fortschreitet. So ist z. B: 0,6874 X 100 = 68,74; ferner 16,832 X 100 = 1683,2;

oder 0,00863 X 100 = 0,863; endlich 8,37 X 100 = 837 u. s. w.

III. Auf gleiche Weise wird auch 0,4387 X 1000 = 438,7; 73,85219 X 1000 = 73852,19; 0,346 X 1000 = 346; 0,73805 X 10000 = 7380,5 u. s. f.

IV. Dies gibt überhaupt die Regel: ein Decimalbruch wird mit 1, woran sich mehrere Nullen befinden, (d. h. mit 10, 100, 1000, 10000 u. s. f.) multiplicirt, wenn man den Einerstrich des Bruchs um so viele Stellen zur Rechten fortrücken läßt, als wie viele Nullen sich an der 1 befinden.

V. Sind mehr Nullen an der 1, als Bruchstellen an dem Bruche, so fällt der Einerstrich ganz hinweg, und man muß jenen Ueberschuß von Nullen zur Rechten des Decimalbruchs setzen. Denn es ist z. B: 0,684 X 10000 = 0,684 X 1000 X 10 = 684 X 10 (IV.) = 6840. Desgleichen wird 6,32 X 100000 = 6,32 X 100 X 1000 = 632 X 1000 = 632000. Endlich 0,0005 X 1000000 = 0,0005 X 10000 X 100 = 5 X 100 = 500, u. s. f.

§. 11.

Multiplication eines Decimalbruchs mit Ganzen ohne Nullen.

Um einen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl, woran sich keine Nullen befinden, zu multipliciren, setze man den Multiplicator so unter den zu multiplicirenden Bruch, als wenn beyde Factoren ganze Zahlen wären, und, nachdem die Multiplication gerade so wie bey diesen Zahlen ist verrichtet worden, schneide man am Producte von der Rechten zur Linken so viele Ziffer aber, als sich Decimalbruchstellen an dem Multiplicanden befinden. Siehe die Beyspiele.

Die Richtigkeit des Verfahrens beruht theils darauf, daß die Decimalbrüche nach dem zehntheiligen Gesetze gebildet sind; theils aber darauf, daß das Product in der niedrigsten Ziffer offenbar von der nämlichen Decimalstelle seyn muß, von welcher auch der Multiplicand in seiner niedrigsten Ordnung ist.

Beyspiele.

I.
```
0,38465 } Factoren
      7 }
-------
2,69255 Product.
```

II.
```
0,864237 } Factoren
      58 }
--------
 6913896
4321185
--------
50,125746 Product.
```

III.
```
34,6254 } Fact.
      9 }
-------
311,6286 Product.
```

IV.
```
51,00062 } Fact.
      28 }
--------
 40800496
10200124
---------
1428,01736 Prod.
```

Hätte die ganze Zahl mehr Stellen, als der Decimalbruch, so schreibe man jene als Multiplicanden über diesen als Multiplicator und verfahre wie vorhin. Denn einerley Factoren geben, auch in verkehrter Ordnung, einerley Product; z. B: 0,33 × 8725 = 8725 × 0,33, welches folgende Rechnung gibt:

```
   8725 } Factoren.
   0,33 }
-------
  26175 } Theilfacta.
 26175  }
-------
2879,25 Product.
```

§. 12.

Multiplication eines Decimalbruchs durch Ganze mit Nullen.

Sollte man einen gegebenen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl, woran sich eine Nulle oder mehrere Nullen befinden, multipliciren, so verfahre man in Rücksicht der ganzen Zahl nach §. 10, in Hinsicht der Nullen aber nach §. 8 und 9.

Beyspiele.

I. 0,6432 840 ——— 25728 51456 ——— 540,288	Denn 0,6432 × 840 = 0,6432 × 84 × 10 = 540,288 × 10 = 540,288.
II. 25,34 1300 ——— 7602 2534 ——— 32942	Denn 25,34 × 1300 = 25,34 × 13 = 329,42 × 100 = 32942.
III. 8,532 70000 ——— 597240	Denn 8,532 × 70000 = 8,532 × 7 × 10000 = 59,724 × 10000 = 597240.

IV. 6,3 X 425900 oder

```
     425900
        6,3
    -------
     127770
   2555400
   -------
   2683170 Product.
```

§. 13.

Multiplication eines Decimalbruchs mit einem Decimalbruche.

Um einen gegebenen Decimalbruch mit einem gegebenen Decimalbruche zu multipliciren, schreibe man den aus den wenigsten Ziffern bestehenden Factor so unter den andern Factor, daß die niedrigsten Stellen beyder unter einander stehen, verrichte die Multiplication gerade so, wie in ganzen Zahlen, und schneide an dem Producte von der Rechten zur Linken so viele Stellen ab, als die Summe der Decimalstellen in beyden Factoren beträgt. Siehe die Beyspiele.

Die Richtigkeit der Theilfacta und der Ziffer des Products folgt aus §. 3. — Daß aber auch die Stelle des Einerstrichs die richtige

sey, läßt sich sehr faßlich in einem Beyspiele zeigen. Es sey 0,348 mit 0,26 zu multipliciren, so besteht die niedrigste Stelle des Multiplicanden aus Tausendtel und jene des Multiplicators aus Hunderttel. Werden diese Stellen mit einander multiplicirt, so müssen in der niedrigsten Ziffer des Products nothwendig Hunderttausendtel erscheinen, da der hunderte Theil von dem tausendten Theile der Einheit natürlich der hunderttausendte Theil dieser Einheit ist. — Dieser Beweis kann auf alle andere Fälle angewendet werden.

Beyspiele.

I.	
0,623	
048	
4984	
2492	
0,29904	Product.

III.	
35,2782	
0,9	
317,5038	Product.

II.	
0,32542	
0,213	
97626	
32542	
65084	
0,6931446	Product.

IV.	
132,8324	
0,0053	
3984972	
6641620	
0,70401172	Prod.

V. 8,63 X 0,000005
0,00004315 Product.

VI. 43,21
7,38

34568
12963
30247

31,88898

Wenn man das I. und II. Beyspiel genauer betrachtet, so ergibt sich sogleich, daß jedes der dortigen Producte kleiner, als jeder seiner Factoren ist. In ganzen Zahlen hat dieses niemals Statt. Allein, da Decimalbrüche nur Theile der Einheit enthalten, so heißt: einen Decimalbruch mit einem andern multipliciren, soviel als von dem einen ein solches Stück nehmen, als der andere es anzeigt, wodurch nothwendig eine Verkleinerung des Productes entstehen muß.

Der Beweis von 13. §. kann auch auf folgende Art geführt werden. Wenn z. B: 0,643 mit 0,25 multiplicirt werden sollte, und man multiplicirte die ganze Zahl 643 mit der ganzen Zahl 25, so würde das Product 36075 (da jener Factor 1000mal, dieser aber

100mal zu groß ist) natürlich 100000mal zu groß werden. Daher muß man dasselbe, um ihm seine wahre Größe zu geben, wieder 100000mal kleiner machen, wodurch die 5 Einer zu 5 Hunderttausendtel werden, welches offenbar 0,16075 zum richtigen Producte gibt.

§. 14.

Division eines Decimalbruchs mit 10.

Wenn die Ziffer eines gegebenen reinen oder gemischten Decimalbruchs unverändert bleiben, der Einerstrich aber um eine Stelle zur Linken gerückt wird, so ist der ganze Bruch hierdurch zehnmal kleiner, d. h. mit 10 dividirt worden.

Denn durch dieses Verrücken des Einerstrichs werden die Zehntel des gegebenen Bruchs zu Hunderttel, die Hunderttel zu Tausendtel, seine Tausendtel zu Zehntausendtel. Enthält er aber auch noch Ganze, so werden dessen Einer zu Zehntel, seine Zehner zu Einer

u. s. w. Der gegebene Bruch wird daher in allen seinen Theilen zehnmal kleiner, folglich auch im Ganzen.

Demnach ist 0,684: 10 = 0,0684; ferner 0,034: 10 = 0,0034; auch 28,67: 10 = 2,867; 314,006: 10 = 31,4006 u. s. w. denn wenn man statt 0,684 den Bruch 0,0684 setzt, so sind aus den vorigen 6 Zehntel nun 6 Hunderttel, aus den frühern 8 Hunderttel nun 8 Tausendtel und aus den 4 Tausendtel nun 4 Zehntausendtel geworden. Folglich ist der neue Bruch zehnmal kleiner als der gegebene.

§. 15

Folgerungen daraus.

I. Um einen Decimalbruch mit 10 zu dividiren, darf man nur den Einerstrich um eine Stelle zur Linken fortrücken.

II. Auch wird der gegebene Bruch mit 100 dividirt, wenn der Einerstrich um zwey Stellen zur Linken fortschreitet. So ist z. B: 264,382: 100 = 2,64382; 7,3421: 100 = 0,073421; 87,6: 100 = 0,876 u. s. f. Denn

durch dieses Verrücken des Einerstrichs wird jede Stelle hundertmal kleiner am Werthe.

III. Desgleichen ist 8734,27 : 1000 = 8,73427; 45,03 : 10000 = 0,004503; 0,3 : 100000 = 0,000003 u. s. f.

IV. Hieraus fließt im Allgemeinen die Regel:

Um einen Decimalbruch mit einer 1, woran sich mehrere Nullen befinden, zu dividiren, rücke man den Einerstrich um so viele Stellen zur Linken, als wie viele Nullen die 1 bey sich hat.

§. 16.

Verwandelung des Divisionsrestes in Decimalbruchtheile.

Um den Rest, welcher oft bey der Division in ganzen Zahlen entsteht, durch Decimalbruchtheile auszudrücken, hänge man

I. zur Rechten des Restes eine Nulle und dividire mit dem Divisor hinein, so findet man die Zehntel des Quotienten, welche neben den Einerstrich gesetzt werden. Das Product aus diesen Zehntel in den Divisor

ist nun entweder dem mit einer Nulle versehenen Reste gleich, oder kleiner als derselbe. Im ersten Falle ist die Division vollkommen geschlossen; Siehe Beyspiel I.

II. Im zweyten Falle aber hänge man an den neuerdings bleibenden Rest abermals eine Nulle, dividire mit dem Divisor hinein, so erhält man die Hunderttel des Quotienten. Auf solche Weise fahre man

III. nach I. und II. so lange fort, bis sich die Division entweder einmal schließet, oder bis die gefundenen Decimalbruchtheile des Quotienten so klein geworden sind, daß man (für den Fall der Rechnung) keine kleinere mehr zu finden braucht. Siehe die Beyspiele.

Der Rest, welcher bey gewöhnlichen Divisionsaufgaben in ganzen Zahlen bleibt, besteht in seiner niedrigsten Stelle aus Einern. Durch das Anhängen der Nulle werden diese mit 10 multiplicirt. Daher muß der Quotient aus dem Divisor in diesen zehnmalvergrößerten Dividenden auch wieder zehnmal kleiner werden, als die Einer sind. Folglich enthält

dieser Quotient Zehntel. Hieraus fließt die Richtigkeit der I. Regel. Die Regel II. und III. folgt aus demselbigen Grunde und nachstehende Beyspiele werden sie noch mehr aufklären.

I. Divisor. Dividend. Quotient.

```
5 |  3827   ( 765,4
     35
     --
      32
      30
      --
       27
       25
       --
        20
        20
        --
        00
```

Hier bleiben 2 Einer zum Reste, in welchen der Divisor 5 nicht mehr nach Einern enthalten ist. Durch Anhängen der Nulle wird dieser Rest 10mal zu groß und man muß ihn, um ihm seinen gehörigen Werth zu geben, 10mal kleiner machen, wodurch 4 Zehntel entstehen. Daher ist 5 in 3827 siebenhundert fünf und sechzig und vier zehntelmal enthalten.

II. Divisor. Dividend. Quotient.

```
8 | 389 ( 48,625
    32
    --
     69
     64
     --
      50
      48
      --
       20
       16
       --
        40
        40
        --
        00
```

Hier hat sich die Division erst in den Tausendtel genau abgeschlossen.

```
III. 12 | 857 ( 71,4166 . . . .
          84
          --
           17
           12
           --
            50
            48
            --
             20
             12
             --
              80
              72
              --
              80
              72
              --
               8
```

Hier geht der Quotient ins Unendliche fort, welches man durch die neben ihm stehenden Puncte bezeichnet. Auch kömmt in jede folgende Decimalbruchstelle die Ziffer 6. Wie viele von diesen Stellen man zu nehmen habe, hängt von dem Grade der Schärfe ab, womit der Quotient bestimmt werden soll. Wäre die Einheit z. B. ein Fuß, so ist der tausendte Theil schon so klein, daß er meist für unentbehrlich angesehen und deshalb vernachläßigt werden kann.

§. 17.

Folgerungen daraus.

Es ist lehrreich, diese Decimalbruchstellen des Quotienten bey verschiedenen Divisoren (von 2 bis 9 z. B.) genauer kennen zu lernen. Hierzu dienen folgende Beyspiele:

I. 2 | 17 (8,5 ohne Rest.
16
――
10
10
――
00

II. 3 | 28 (9,33 . . ins Unendliche, mit gleichen Ziffern.
27
———
10
9
———
10
9
———
10

III 4 | 31 (7,75 ohne Rest.
28
———
30
28
———
20
20
———
00

IV. 5 | 651 | 130,2 ohne Rest.
5
———
15
15
———
10

V. 6 | 38 | 6,33 . . ins Unendliche, mit gleichen Ziffern.
36
———
20
18
———
20

VI. 7 | 22 | 3,1428571 . . ins Unendliche mit Wiederholung der Ziffer 142857

```
 21
 ——
 10
  7
 ——
  30
  28
  ——
   20
   14
   ——
   60
   56
   ——
    40
    35
    ——
     50
     49
     ——
     10
```

VII. 8 | 75 | 9,375 ohne Rest.

```
 72
 ——
 30
 24
 ——
  60
  56
  ——
  40
  40
  ——
  00
```

VIII. 9 | 32 (3,55 .. ins Unendliche mit Wiederholung der Ziffer 5.

```
 27
 ──
  50
  45
  ──
   50
   45
   ──
   50
```

Weil 2 in 10; 4 in 100; 5 in 10; 8 in 1000 ohne Rest aufgeht, so bricht auch die Division in I, III, IV, VII, einmal ab. Da aber weder 3, noch 6, noch 7, noch 9, Factoren von 10, 100, 1000 u. s. f. ohne Rest sind, so geht in II, V, VI, und VIII, die Reihe der Decimalbruchstellen des Quotienten ins Unendliche fort. — Anfängern ist zu rathen, daß sie diese Division mit Divisoren über 9, z. B. mit 11, 12, 13, u. s. f. fortsetzen.

§. 18.

Division eines Decimalbruchs durch eine ganze Zahl.

Um einen gegebenen Decimalbruch durch eine ganze Zahl, welche weniger Ziffer als er selbst hat, zu dividiren, dividire man

I. mit dem Divisor gerade so in den Decimalbruch, als wenn dieser auch eine ganze Zahl wäre, und setze die niedrigste Ziffer des Quotienten in jene Bruchstelle, welche mit der niedrigsten Ziffer des Dividenden einerley ist. Siehe Beyspiel I.

II. Bleibt in I. noch ein Rest, so hänge man eine Nulle an, und bestimme sodann die folgenden Decimalstellen nach §. 16. Siehe die Beyspiele.

Die Regel I. beruht darauf, daß durch das Theilen des ganzen Bruchs, auch dessen niedrigste Stelle getheilt werden muß, wodurch die niedrigste Stelle des Quotienten die nämliche Ordnung erhält. Der Grund von Regel II liegt in §. 16.

Beyspiele.

I. 15 | 0,36825 (0,02455 ohne Rest.

```
        30
        --
        68
        60
        --
         82
         75
         --
          75
          75
          --
          00
```

II. 8 | 0,345 | 0,043125 ohne Rest.

```
 32
 ――
  25
  24
  ――
   10
    8
   ――
   20
   16
   ――
    40
    40
    ――
    00
```

III. 126 | 0,361 | 0,0020714.. ohne Ende.

```
 252
 ―――
  900
  882
  ―――
   180
   126
   ―――
    540
    504
    ―――
     36
```

IV. 5 | 38,025 | 7,605

```
 35
 ――
  30
  30
  ――
   25
   25
   ――
   00
```

Wenn aber der Dividend weniger Ziffer, als der Divisor enthält, so befolgt die Rechnung einen ähnlichen Gang. z. B.

```
I. 152 | 0,32 | 0,0021. . ohne Ende.
         320
         304
         ---
          160
          152
          ---
            8

II. 246 | 0,09 | 0,00036 . ohne Ende.
          900
          738
          ---
          1620
          1476
          ----
           144

III. 25 | 1 (0,04 ohne Rest.
          100
          100
          ---
          000
```

§. 19.

Division einer ganzen Zahl durch einen Decimalbruch.

Eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch zu dividiren, hänge man zur Rechten an den Dividenden so viele Nullen, als wieviele Decimalbruchstellen der Divisor hat, und divi-

dire nun, nach dem vorigen §. mit dem Decimalbruche, als wäre er in allen seinen Stellen eine ganze Zahl, in den mit Nullen versehenen Dividenden, so findet man den richtigen Quotienten.

Die Richtigkeit des Verfahrens ergibt sich am Faßlichsten aus einem Beyspiele. Wenn man z. B. 346 mit 0,82 dividiren soll, so muß der Quotient derselbe bleiben, wenn sowohl der Divisor als der Dividend mit der nämlichen dritten Zahl multiplicirt wird. Dies folgt aus den Sätzen von der Division in Zahlen überhaupt. Daher ist 346 : 0,82 = 346 X 100 : 0,82 X 100 = 34600 : 82, welches folgende Rechnung gibt;

```
I. 82 | 34600 | 421,95 . . ohne Ende.
        328
        ———
         180
         164
         ———
          160
           82
          ———
           780
           738
           ———
            420
            410
            ———
             10
```

II. 46 : 13,581 = 46000 : 13581 oder

13581 | 46000 | 3,387 . . ohne Ende.

```
13581 | 46000 | 3,387
        40743
        -----
         52570
         40743
        ------
         118270
         108648
        -------
          96320
          95067
         ------
           1253
```

§. 20.

Division eines Decimalbruchs durch einen Decimalbruch.

Einen Decimalbruch durch einen Decimalbruch zu dividiren, rücke man in dem Dividenden den Einerstrich um so viele Ziffer zur Rechten fort, als wieviele Decimalbruchstellen sich in dem Divisor befinden (wobey man noch zuweilen an den Dividenden wird Nullen zu hängen haben) und dividire nun mit dem Divisor, als wäre er eine reine ganze Zahl, in den neuen Dividenden. (nach §. 18).

Da nach dieser Verfahrungsart Divisor und Dividend mit der nämlichen Zahl multiplicirt worden sind, so bleibt der Quotient unverändert. Das Uebrige der Auflösung beruht auf der Richtigkeit des §. 18.

Beyspiele.

```
I. 0,324 | 0,875 ist soviel, als
     324 | 875 ( 2,7006 . . ohne Ende.
           648
           ----
           2270
           2268
           ----
            2000
            1944
            ----
              56

II. 0,14 | 0,635 ist soviel, als
      14 | 63,4 ( 4,528 . . ohne Ende.
           56
           --
            74
            70
            --
            40
            28
            ---
            120
            112
            ---
              8
```

III. 0,254 | 0,3874 ist soviel, als

2540 | 3874 (1,525 . . ohne Ende.

```
2540 | 3874 ( 1,525 . .
       2540
       -----
       13340
       12700
       -----
        6400
        5080
        -----
        13200
        12700
        -----
          500
```

IV. 3,14 | 0,6 heißt soviel, als

314 | 600 (0,19108 . . ohne Ende.

```
314 | 600 ( 0,19108 . .
      314
      ----
      2860
      2826
      ----
       340
       314
       ----
       2600
       2512
       ----
         88
```

V. 8,5 | 31,006 ist soviel, als
8500 | 31006 (3,64 . . ohne Ende.
25500
———
55060
51000
———
40600
34000
———
6600

VI. 34,23 | 0,1 ist soviel, als
3423 | 10 (0,0029 . . ohne Ende.
10000
6846
———
31540
30807
———
733

Da sich die die Multiplication und die Division gegenseitig zu Proben dienen, so können alle seitherige Multiplications-Beyspiele als Divisions-Uebungen, und alle Divisions-Beyspiele als Multiplications-Uebungen benützt werden. Diese Rechnungen wirklich durchzuführen, ist den Anfängern sehr zu empfehlen.

§. 21.

Abgekürzte Multiplication

Gesetzt man solle das Product aus 0,842365 X 0,249371 bilden, so wäre die gewöhnliche Rechnung diese:

0,842365	Factoren.
0,249371	
842365	Theilfacta.
5896555	
2527095	
7581285	
3369460	
1684730	
0,210061402415	Product.

Allein, man kann diese Multiplication auch mit der größten Ziffer des Multiplicators (hier mit 2) anfangen und nach und nach mit den niedrigern Ziffern fortfahren, nach diesem Muster:

0,842365 M	
0,249371 m	
1684730	A
336946	0 B
75812	85 C
2527	095 D
589	6555 E
8	42365 F
0,2100614	01415 P

Wollte man nun das Product nicht auf 12 Stellen finden, (was in den meisten Fällen wegen Kleinheit der letztern Bruchstellen nicht nöthig ist) so brauchte man jene Ziffer, welche zur Rechten des gezogenen Verticalstrichs stehen, weder zu berechnen, noch zu schreiben. Dies geschieht dadurch, daß man (siehe das untere Beyspiel) zuerst alle Ziffer von M mit der 2 in m multiplicirt, woraus A entsteht. Dann multiplicire man mit der 4 in m die 6 und alle höhere Stellen in M; mit der 9 in m die 3 und alles Höhere in M; mit der 3 in m die 2 und alles Höhere in M; mit der 7 in m die 4 und alles Uebrige in M; mit der 1 in m die 8 in M; und setze diese Producte in die Reihen A, B, C, D, E, F, so entsteht aus ihrer Summe das Product P, welches höchstens in seinen beyden niedrigsten Ziffern unrichtig ist.

0,842365	M	Factoren.
0,249371	m	
1684730	A	abgekürzte Theilfacta,
336944	B	
75807	C	
2526	D	
588	E	
8	F	
0,2100603	P	abgekürztes Product.

Hier können die beyden letzten Ziffer (03) als unrichtige Stellen hinweggelassen werden.

§. 22.

Abgekürzte Division.

Die abgekürzte Division in Decimalbrüchen besteht darin, daß man zuerst mit dem ganzen Divisor in den ganzen Dividenden; sodann mit dem um seine niedrigste Ziffer verminderten Divisor in den zweyten Theil des Dividenden; hierauf mit dem abermals um seine niedrigste Stelle verminderten Divisor in den dritten Theil des Dividenden dividirt und damit bis zu Ende fortfährt. Zum Beyspiele diene das vorige Multiplications-Exempel:

```
Divisor.   Dividend.   Quotient.
0,249371 | 0,2100603 (0,842365
           1994968
           -------
            105635
             99748
            ------
              5887
              4986
              ----
               901
               747
               ---
               154
               144
               ---
                10
                10
                --
                00
```

Die Vortheile, welche die Decimalbrüche in den Rechnungen gewähren, werden in dem fünften Buche recht einleuchtend werden.

Fünftes Buch.

Von den gemeinen Brüchen.

§. 1.

Entstehung der gemeinen Brüche.

Wenn man irgend ein Ganzes in eine beliebige Menge gleicher Theile eintheilt, und irgend eine Menge dieser Theile zusammenfaßt, so entsteht ein **Bruch** oder eine gebrochene **Zahl**. Zur Erläuterung denke man sich eine bestimmte gerade Linie, welche z. B. in 8 gleiche Theile abgetheilt ist, so heißt jeder dieser Theile der **achte** Theil der Linie, oder kürzer **ein Achtel**. Nimmt man 2 dieser Theile zusammen, so hat man 2 Achtel, 3 dieser Theile geben 3 Achtel, 4 derselben 4 Achtel u. s. w. bis man auf 8 Achtel kömmt, welche zusam-

mengenommen der ganzen Linie gleich sind. Nähme man 11 solcher Theile, so erhielte man 11 Achtel, aus 15 derselben entständen 15 Achtel u. s. w., welche letztere mehr als die ganze Linie betrügen. Die Werthe 3 Achtel, 5 Achtel, 11 Achtel, 15 Achtel u. s. w. heißen Brüche der gegebenen, zur Einheit angenommenen geraden Linie.

§. 2.

Bedeutung des Nenners und Zählers.

Aus dieser Entstehung der Brüche folgt, daß ihr Werth von Zweyerley abhänge; nämlich sowohl von der Menge der aus dem Ganzen gebildeten gleichen Theile, als auch von der Menge der in ein neues Ganze zusammengefaßten Theile. Beydes kann durch eine Zahl ausgedrückt werden. Daher heißt jene Zahl, welche angibt, in wieviele gleiche Theile das Ganze getheilt worden ist, der Nenner; die andere Zahl aber, welche andeutet, wieviele dieser Theile zusammengefaßt worden sind, der Zähler des Bruchs. In dem Bruche 5 Achtel ist 8 der Nenner, weil er angibt, daß das Ganze 8 gleiche Theile enthält; 5 aber ist der Zäh-

ker, weil man daraus erkennt, daß gerade 5 solcher Theile genommen worden sind. Auf gleiche Weise ist in dem Bruche 7 Zwölftel der Nenner die Ziffer 12, der Zähler aber 7, weil das Ganze hier aus 12 gleichen Theilen besteht, wovon 7 vorhanden sind. Auch sieht man hieraus, daß der **Nenner** des Bruchs die Art der Bruch-Theile **benennt**, indeß der **Zähler** die Menge dieser Bruchtheile **zählt**.

§. 3.

Willkührliche Bezeichnung der Brüche.

Um die Brüche auf bequeme Art zu bezeichnen, setzt man den Zähler oberhalb, den Nenner unterhalb eines gezogenen Querstrichs. So bedeutet z. B. $\frac{5}{8}$ soviel als fünf Achtel; $\frac{7}{12}$ heißt sieben Zwölftel; $\frac{18}{29}$ heißt achtzehn Neunundzwanzigtel u. s. f.

§. 4.

Folgerungen aus dem Bisherigen.

Aus dem Bisherigen ergeben sich nachstehende durch sich selbst einleuchtende Folgerungen:

I. die Brüche sind Zahlen, deren Einheiten Theile eines gleichgetheilten Ganzen sind. Der

Bruch $\frac{5}{12}$ ist eine Zahl, da er die Einheit $\frac{1}{12}$ gerade fünfmal enthält.

II. Daher haben auch mit Brüchen alle Veränderungen Statt, welche bey ganzen Zahlen vorkommen. Es gibt folglich eine Addition, Subtraction, Multiplication und Division in Brüchen.

III. Alle Brüche, deren Nenner größer als der Zähler ist, sind nur ein Theil des Ganzen; gleichsam ein von dem Ganzen abgebrochenes Stück, woher auch die Benennung Bruch entstanden ist. Die Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{17}$, $\frac{116}{229}$, u. s. w. sind alle kleiner als 1.

IV. Alle Brüche, welche gleiche Nenner und Zähler haben, sind = 1. Denn in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt worden ist, eben so viele werden hier wiederum zusammengefaßt. Alle Theile aber sind dem Ganzen gleich. Daher ist $\frac{4}{4} = \frac{6}{6} = \frac{9}{9} = \frac{15}{15} = \frac{236}{236} = 1$.

V. Brüche, deren Zähler größer als der Nenner ist, sind auch größer als 1. Denn sie enthalten mehrere von jenen gleichen Theilen, in welche das Ganze getheilt worden ist; folglich betragen sie auch mehr als dieses Ganze. So ist $\frac{15}{8}$ größer als 1, weil schon $\frac{8}{8} = 1$ ist. Eben dieses gilt von den Brüchen $\frac{15}{11}$, $\frac{20}{13}$, $\frac{64}{23}$ u. s. w. Daraus sieht man schon, daß solche Brüche eigentlich keine Bruchstücke des Ganzen sind, sondern mehr als das Ganze betragen.

VI. Alle Brüche sind Quotienten aus dem Zähler als Dividend und aus dem Nenner als Divisor. Der Bruch $\frac{5}{8}$ z. B. heißt soviel als 5 dividirt durch 8. Denn, wenn man 1 durch 8 dividirt, so erhält man offenbar $\frac{1}{8}$; folglich müssen 5 durch 8 dividirt, $\frac{5}{8}$ geben.

VII. Auch sind alle Quotienten soviel als Brüche, deren Zähler der Dividend und deren Nenner der Divisor ist. Denn 5 dividirt durch 8 heißt nichts anders, als die 5 soll in 8 gleiche Theile getheilt werde. Theilte man nun 1 in

8 gleiche Theile, so erhielte man $\frac{1}{8}$; folglich muß man 5mal mehr, d. h. $\frac{5}{8}$ erhalten, wenn 5 in gleiche Theile getheilt wird.

§. 5.

Aechte und unächte Brüche.

Aus dem Bisherigen ergibt sich auch der Unterschied zwischen ächten und unächten Brüchen. Ein ächter Bruch ist derjenige, welcher kleiner ist als das Ganze; unächte Brüche dagegen werden jene genannt, welche entweder dem Ganzen gleich, oder größer als das Ganze sind. Die Brüche $\frac{7}{9}$ $\frac{8}{13}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{11}{150}$ sind daher ächte, die Brüche $\frac{4}{4}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{12}{7}$, u. s. f. unächte Brüche.

§. 6

Bestimmung der Ganzen eines unächten Bruchs.

Um die Zahl der Ganzen zu finden, welche ein unächter Bruch enthält, dividire man mit

seinem Nenner in den Zähler. Bleibt kein Rest, so drückt der Quotient die Zahl der Ganzen aus; ergibt sich aber noch ein Rest, so zeigt dieser die Bruchtheile an, welche noch außer den Ganzen in dem Bruche enthalten sind; z. B. $\frac{15}{5} = 3$; denn $\frac{5}{5} = 1$, daher $\frac{10}{5} = 2$ und folglich $\frac{15}{5} = 3$. Ferner ist $\frac{40}{8} = 5$, weil $\frac{8}{8} = 1$ und $\frac{40}{8}$ offenbar 5mal größer ist als $\frac{8}{8}$. — Weiter ist $\frac{20}{6} = 3\frac{2}{6}$. Denn da $\frac{6}{6} = 1$, so ist $\frac{12}{6} = 2$ und $\frac{18}{6} = 3$, folglich $\frac{20}{6} = 3$ und $\frac{2}{6}$ Desgleichen ist $\frac{65}{12} = 5$ und $\frac{5}{12}$, wofür man $5\frac{5}{12}$ schreibt.

§. 7.

Verwandlung einer ganzen Zahl in einen Bruch von gegebenem Nenner.

Soll eine gegebene ganze Zahl in einen Bruch von bestimmtem Nenner verwandelt

werden, so multiplicire man diesen Nenner mit jener Zahl und setze eben diesen Nenner unter das Product. So ist z. B. 6 Ganze in 7tel verwandelt, so viel als 6mal 7 d. h. $\frac{42}{7}$. Denn da $\frac{7}{7}=1$, so muß $6=6 \times \frac{7}{7}=42$ siebentel seyn. Desgleichen ist $10=\frac{60}{6}=\frac{80}{8}=\frac{140}{14}$; ferner $8=\frac{40}{5}=\frac{56}{7}=\frac{72}{9}$ u. s. w.

§. 8.

Veränderung des Bruchs durch Multiplication seines Zählers und Nenners.

I. Wenn man den Zähler eines Bruchs, bey unverändertem Nenner, mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der ganze Bruch mit dieser Zahl multiplicirt d. h. er so vielmal größer, als sie Einheiten hat. Denn wenn z. B. der Zähler des Bruchs $\frac{6}{7}$ mit 4 multipli-

cirt wird, so erhält man $\frac{24}{7}$, welche offenbar viermal größer sind als $\frac{6}{7}$, da der Zähler des Bruchs die Vielheit der Bruchtheile zählt.

II. Wird dagegen der Nenner des Bruchs, bey unverändertem Zähler, mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der Werth dieses Bruchs sovielmal kleiner, als die ganze Zahl Einheiten hat. Multiplicirt man z. B. den Nenner des Bruchs $\frac{5}{8}$ mit 3, wodurch der Bruch $\frac{5}{24}$ entsteht, so ist klar, daß letzterer 3mal kleiner als ersterer seyn muß. Denn $\frac{1}{24}$ ist 3mal kleiner als $\frac{1}{8}$, da die Einheit dort in 3mal mehr gleiche Theile getheilt ist, als hier. Daher ist auch der Bruch $\frac{5}{24}$ dreymal kleiner als der Bruch $\frac{5}{8}$.

III. Multiplicirt man sowohl Zähler als Nenner eines Bruchs mit der nämlichen ganzen Zahl, so bleibt der Bruch am Werthe

unverändert. Denn durch das Erste wird er so vielmal größer, als er durch das Zweyte wiederum verkleinert wird. So ist z. B: $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{12}{18} = \frac{20}{30} = \frac{15}{45}$ u. s. w.

§. 9.

Multiplication und Division eines Bruchs durch eine ganze Zahl.

Aus dem vorigen §. ergibt sich das Verfahren, um einen gegebenen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren oder mit derselben zu dividiren. Im ersten Falle wird des Bruches Zähler, im andern aber dessen Nenner mit der gegebenen Zahl multiplicirt; z. B. $\frac{7}{12} \times 8 = \frac{56}{12} = 4\frac{8}{12}$; ferner $\frac{3}{5} \times 12 = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ u. s. w. Desgleichen ist $\frac{3}{4} : 7 = \frac{3}{28}$; ferner $\frac{5}{11} : 3 = \frac{5}{33}$ u. s. f.

§. 10.

Veränderung des Bruchs durch Division seines Zählers und Nenners.

I. Wenn man eines Bruches Zähler, bey unverändertem Nenner, mit einer ganzen Zahl dividirt, so wird der Bruch so vielmal kleiner, als die ganze Zahl Einheiten hat. So gibt z. B. $\frac{20}{37}$, am Zähler durch 4 dividirt, den Bruch $\frac{5}{37}$, welcher offenbar 4mal kleiner, als $\frac{20}{37}$ ist, weil hier 4mal mehr Bruchtheile vorhanden sind, als dort.

II. Wird dagegen der Nenner eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt, dessen Zähler aber unverändert gelassen, so entsteht ein neuer Bruch, welcher so vielmal größer als der vorige ist, als wie viele Einheiten die ganze Zahl enthält. Wenn man den Nenner des Bruchs $\frac{7}{40}$ durch 5 dividirt, so entsteht

der Bruch $\frac{7}{8}$, welcher 5mal größer als $\frac{7}{40}$ ist, da $\frac{1}{8}$ fünfmal mehr beträgt als $\frac{1}{40}$.

III. Hieraus folgt, daß der Werth eines Bruches unverändert bleibe, wenn man dessen Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl dividirt, da er im ersten Falle verkleinert, und im zweyten wiederum eben so vielmal vergrößert wird. So ist z. B. $\frac{248}{688} = \frac{248:2}{688:2} = \frac{124}{344} = \frac{124:2}{344:2} = \frac{62}{172} = \frac{62:2}{172:2} = \frac{31}{86}$ u. s. w.

§. 11.

Zweyte Art, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren oder zu multipliciren.

Hieraus folgt eine zweyte Methode zur Division oder Multiplication eines Bruchs durch eine ganze Zahl. Im ersten Falle kann man

seinen Zähler, im zweyten Falle seinen Nenner damit dividiren. So ist z. B. $\frac{20}{31} : 5 = \frac{4}{31}$; ferner $\frac{36}{47} : 12 = \frac{3}{47}$; endlich $\frac{10}{13} : 2 = \frac{5}{13}$ u. s. w.; wobey zu bemerken ist, daß dieses Verfahren nur dann nützlich seyn wird, wenn die ganze Zahl in des Bruches Zähler ohne Rest enthalten ist. Desgleichen wird $\frac{7}{12} \times 4 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$; ferner $\frac{9}{20} \times 5 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, endlich $\frac{11}{36} \times 12 = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ u. s. w.

§. 12.

Das Heben und die kleinste Benennung der Brüche.

Einen Bruch heben heißt: denselben in einen andern, ihm gleichen verwandeln, dessen Zähler und Nenner kleiner, als Zähler und Nenner des gegebenen sind. Einen Bruch zur kleinsten Benennung bringen heißt: denselben ohne Veränderung seines Werthes, durch

die kleinsten Zahlen ausdrücken, in welchen er dargestellt werden kann.

I Um einen Bruch zu heben, dividire man seinen Zähler und Nenner durch eine Zahl, welche in beyden ohne Rest aufgeht, so sind die Quotienten, nach eben der Ordnung, Zähler und Nenner des neuen Bruchs z. B. $\frac{68}{184} = \frac{68:4}{184:4} = \frac{17}{46}$; ferner $\frac{608}{1792} = \frac{608:2}{1792:2}$ $= \frac{304}{896} = \frac{304:2}{896:2} = \frac{152}{448} = \frac{152:2}{448:2} = \frac{76}{224} =$ $\frac{76:2}{224:2} = \frac{38}{112} = \frac{38:2}{112:2} = \frac{19}{56}$ u. s. w.

II. Um einen Bruch zur kleinsten Benennung zu bringen, befolge man diese Regeln:

1) Man dividire mit dessen Zähler in den Nenner; bleibt kein Rest, so ist der Zähler selbst die Zahl, womit man den Bruch zur kleinsten Benennung bringt. So ist z. B. $\frac{12}{60} = \frac{12:12}{60:12} = \frac{1}{5}$, wo $\frac{1}{5}$ die kleinste Benennung von $\frac{12}{60}$ ist.

2) Bleibt aber bey der Division ein Rest, so dividire man mit ihm in den vorigen Divisor. Geht diese Division auf, so ist der vorige Rest die größte Zahl, womit man heben kann. Der Bruch sey $\frac{6}{27}$, so ist

```
6 | 27 ( 4
    24
    ----
     3 | 6 ( 2
         6
         --
         0
```

Hier ist 3 die zu findende Zahl und $\frac{2}{9}$ wird die kleinste Benennung von $\frac{6}{27}$.

3) Bleibt bey der 2ten Division wieder ein Rest, so dividire man abermal damit in den letztern Divisor. Geht dies genau auf, so ist voriger Rest die Zahl, womit man heben muß. Es sey $\frac{10}{18}$ der gegebene Bruch, so ist

```
10 | 18 ( 1
     10
    ----
      8 | 10 ( 1
           8
         ----
           2 | 8 ( 4
               8
              ---
               0
```

Hier muß mit 2 gehoben werden, und $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

4) Mit diesen Divisionen fahre man so lange fort, bis entweder kein Rest, oder zum Reste eine 1 bleibt. Im letzten Falle kann der gegebene Bruch nicht gehoben werden, sondern ist schon auf der kleinsten Benennung. Er sey $\frac{19}{25}$, so wird

```
19 | 25 ( 1
     19
   -----
      6 | 19 ( 3
          18
        -----
           1 | 6 ( 6
               6
             ---
               0
```

Hier wäre 1 die Zahl, womit man heben könnte; die Division mit 1 ändert aber die Ziffer des Bruches nicht.

§. 13.

Gleichartigkeit oder gleiche Benennung der Brüche.

Brüche heißen gleichartig, oder von gleicher Benennung, wenn sie einerley

Nenner haben. Denn der Nenner bestimmt offenbar die Art der Eintheilung des Ganzen d. h. die Art der Bruchtheile. Daher sind die Brüche $\frac{4}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}$ gleichartig; die Brüche $\frac{2}{9}$ und $\frac{3}{7}$ aber ungleichartig, denn dort ist das Ganze in 9, hier aber dasselbige Ganze nur in 7 gleiche Theile getheilt.

Brüche unter einerley Benennung bringen, oder gleichartig machen, heißt jeden derselben in einen andern, ihm gleichen, dergestalt zu verwandeln, daß sie alle einerley Nenner haben. Es können hierbey entweder nur zwey, oder mehrere Brüche gegeben seyn.

I. Um zwey gegebene ungleichartige Brüche gleichartig zu machen, multiplicire man Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit dem Nenner des zweyten, und Zähler und Nenner des zweyten mit dem Nenner des ersten Bruchs. Die Brüche seyen $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{9}$, so ist $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 9}{7 \times 9} = \frac{45}{63}$ und $\frac{4}{9} = \frac{4 \times 7}{9 \times 7} = \frac{28}{63}$ und

man hat $\frac{45}{63}$ so groß als $\frac{5}{7}$, und $\frac{28}{62}$ so groß als $\frac{4}{9}$. Die Richtigkeit dieses Verfahrens leuchtet von selbst ein.

Wäre der Nenner des einen Bruchs in dem Nenner des andern ohne Rest enthalten, so multiplicire man Zähler und Nenner jenes Bruchs mit dem entstandenen Quotienten, wodurch sie einerley Nenner erhalten. Die Brüche seyen $\frac{5}{8}$ und $\frac{9}{40}$, so wird, da 8 in 40 fünfmal enthalten ist, aus $\frac{5}{8}$ nunmehr $\frac{25}{40}$, welcher mit $\frac{9}{40}$ gleichartig ist.

II. Wenn mehr als zwey Brüche unter gleiche Benennung zu bringen sind, so multiplicire man Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit dem Producte aus den Nennern der noch übrigen Brüche, so entstehen so viele neue Brüche, welche jenen nach der nämlichen Ordnung gleich sind. Die Brüche seyen $\frac{5}{7}$,

$\frac{8}{9}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$, so wird

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 9 \times 4 \times 5}{7 \times 9 \times 4 \times 5} = \frac{900}{1260}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{8 \times 7 \times 4 \times 5}{9 \times 7 \times 4 \times 5} = \frac{1120}{1260}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7 \times 9 \times 5}{4 \times 7 \times 9 \times 5} = \frac{945}{1260}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 7 \times 9 \times 4}{5 \times 7 \times 9 \times 4} = \frac{504}{1260}$$

Wäre noch ein fünfter Bruch z. B. $\frac{6}{11}$ gegeben so müßte man so rechnen:

$$\frac{5}{7} = \frac{900 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{9900}{13860}$$

$$\frac{8}{9} = \frac{1120 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{12320}{13860}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{945 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{10395}{13860}$$

$\frac{2}{5} = \frac{504 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{5544}{13860}$ und endlich

$\frac{6}{11} = \frac{1260 \times 6}{1260 \times 11} = \frac{7560}{13860}$, wodurch die fünf Brüche gleichartig sind.

§. 14.

Abgekürztes Verfahren, Brüche gleichartig zu machen.

I. Wenn die Nenner der gegebenen Brüche einen gemeinsamen Factor haben, so kann man denselben dadurch einerley Nenner geben, daß man mit diesem Factor in den Nenner des zweyten, dritten, vierten Bruchs u. s. f. dividirt. Das Product dieser Quotienten in den Nenner des ersten Bruchs gibt den kleinsten Hauptnenner aller Brüche. Dividirt man ihn nun mit dem Nenner jedes Bruchs und multiplicirt diesen Quotienten mit dessen Zähler, so erhält man den Zähler dieses Bruches. Die Brüche seyen $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ und $\frac{11}{14}$, so ist 2 gemeinschaftlicher Factor aller Nenner und $6 \times 5 \times 7 = 210$ der kleinste gemeinschaftliche Nenner. Daher wird $\frac{210}{6}$

$\times\ 5 = 175$ der Zähler des ersten; $\frac{210}{10} \times 7 = 21 \times 7 = 147$ der Zähler des zweyten; $\frac{210}{14} \times 11 = 15 \times 11 = 165$ der Zähler des dritten Bruchs, und die drey Brüche sind: $\frac{175}{210}$, $\frac{147}{210}$ und $\frac{165}{210}$. Nach der gewöhnlichen Rechnung wären sie $\frac{700}{840}$, $\frac{588}{840}$ und $\frac{660}{840}$ geworden.

II. Wenn man alle Nenner der gegebenen Brüche in ihre einfache Factoren zerlegen kann (d. h. in solche, aus deren Producte jene Zähler hervorgehen und welche selbst keine Producte zweyer ganzen Zahlen sind) so setze man alle diese Factoren (woraus der gewöhnliche Hauptnenner entstände) neben einander, streiche jene aus, welche bereits aus den andern Nennern vorkommen und multiplicire die noch übrigen mit einander, so gibt das Product den kleinsten Hauptnenner aller Brüche, woraus man nach I. Zähler und Nenner jedes andern Bruchs leicht finden kann. Die Brüche seyen: $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{4}{21}$ und $\frac{1}{14}$

so sind die einfachen Factoren ihrer Nenner folgende:

$2 \times 2 \times 3 \mid \underset{\cdot}{2} \times 5 \mid \underset{\cdot}{2} \times 2 \times \underset{\cdot}{2} \mid \underset{\cdot}{3} \times \underset{\cdot}{5} \mid \underset{\cdot}{3} \times 7 \mid \underset{\cdot}{2} \times \underset{\cdot}{7}$ Werden hier die mit Puncten bezeichneten Factoren weggelassen, so bleibt $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 = 840$ als der kleinste Hauptnenner aller Brüche. Daher wird der erste Zähler $= \frac{840}{12} \times 5 = 70 \times 5 = 350$; der zweyte $= \frac{840}{10} \times 3 = 84 \times 3 = 252$; der dritte $= \frac{840}{8} \times 7 = \frac{5880}{8} = 735$; der vierte $= \frac{840}{15} \times 11 = 56 \times 11 = 616$; der fünfte $= \frac{840}{21} \times 4 = 160$ und der sechste $= \frac{840}{14} \times 1 = 60$. Daher sind die 6 neuen Brüche diese: $\frac{350}{840}, \frac{252}{840}, \frac{735}{840}, \frac{616}{840}, \frac{160}{840}$ und $\frac{60}{840}$.

§. 15.

Bestimmung des Größer- und Kleinerseyns gegebener Brüche.

Wenn mehrere Brüche gegeben sind, und man soll bestimmen, wie sie nach ihrer Größe aufeinander folgen, so bemerke man folgende Regeln:

I. Wenn die Brüche gleiche Nenner haben, so ist jener der größte, welcher den größten, jener der kleinste, welcher den kleinsten Zähler hat. Denn der Zähler bestimmt die Menge der vorhandenen Bruchtheile und es ist z. B. $\frac{8}{11}$ offenbar größer als $\frac{7}{11}$, und $\frac{7}{11}$ größer als $\frac{3}{11}$.

II. Haben die gegebenen Brüche gleiche Zähler, so ist jener der größte, welcher den kleinsten, und jener der kleinste, welcher den größten Nenner hat Denn in je mehr gleiche Theile das nämliche Ganze getheilt ist, desto kleiner wird einer dieser Theil, und umge-

kehrt. Daher ist z. B. $\frac{7}{12}$ größer, als $\frac{7}{20}$ und $\frac{9}{31}$ kleiner, als $\frac{9}{10}$ u. s. w.

III. Hieraus folgt, daß ein Bruch um so mehr größer als ein anderer sey, wenn sein Zähler größer, sein Nenner kleiner, als Zähler und Nenner des andern ist. Der Bruch aber ist kleiner, wenn sein Zähler kleiner, der Nenner aber größer, als der des andern ist. So ist z. B. $\frac{12}{17}$ aus doppeltem Grunde kleiner, als $\frac{10}{11}$.

IV. Wenn daher die gegebenen Brüche verschiedene Nenner haben, so bringe man sie unter gleiche Benennung, und man wird ihre Größe nach den Zählern beurtheilen können. Wären die Brüche $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{12}$, so erhält man, nachdem sie gleichartig geworden sind, die Brüche $\frac{864}{1188}$, $\frac{660}{1188}$ und $\frac{693}{1188}$. Daher ist $\frac{8}{11}$ der größte, $\frac{7}{12}$ der mittlere und $\frac{5}{9}$ der kleinste dieser Brüche.

§. 16.

Das Einrichten der Ganzen und Brüche.

Ganze und Brüche einrichten heißt, die gegebenen Ganzen nebst dem Bruche in einen einzigen Bruch zu verwandeln, welcher ihnen zusammengenommen gleich ist. Um z. B. 8 und $\frac{7}{10}$ einzurichten, verwandle man die 8 Ganze in Zehntel, deren es 80 sind; da aber noch $\frac{7}{10}$ gegeben sind, so beträgt Beydes zusammen $\frac{87}{10}$. Desgleichen ist 12 und $\frac{5}{8}$ soviel als $\frac{96}{8}$ und $\frac{5}{8}$ d. h. soviel als $\frac{101}{8}$ u. s. w.

§. 17.

Die Addition in Brüchen.

Da die Brüche Zahlen sind, die zu addirenden Zahlen aber gleichartig seyn müssen, so müssen es auch die zu addirenden Brüche seyn. Man bemerke folgende Fälle:

I. Wenn die gegebenen Brüche einerley Nenner haben, so addire man ihre Zähler und setze unter diese Summe den Nenner. Offenbar ist z. B. $\frac{3}{14} + \frac{6}{14} = \frac{9}{14}$, da bey gleichen Nennern der Werth des Bruchs vom Zähler abhängt. Da der Nenner die Art der Bruchtheile ausdrückt, so dürfen die Nenner nicht auch addirt werden.

II. Haben aber die zu summirenden Brüche verschiedene Nenner, so mache man sie zuerst gleichartig und verfahre nun ebenso. So ist z. B. $\frac{5}{8} + \frac{7}{9} + \frac{3}{5} = \frac{225}{360} + \frac{280}{360} + \frac{216}{360}$
$= \frac{225 + 280 + 216}{360} = \frac{271}{360} = 2\frac{51}{360}$
u. s. w.

III. Wenn man Ganze und Brüche zu Ganzen nebst Brüchen addiren soll, so kann man diese zuerst einrichten und dann nach dem Vorigen verfahren. So ist z. B. $3\frac{4}{5} +$
$8\frac{7}{9} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} + \frac{72}{9} + \frac{7}{9} = \frac{19}{5} + \frac{79}{9}$

$= \frac{171}{45} + \frac{395}{45} = \frac{566}{45} = 12\frac{26}{45}$ u. s. w.

Oder man addire zuerst die gegebenen Zahlen und dann auch die vorhandenen Brüche; z. B. $12\frac{4}{9} + 7\frac{5}{8} = 12 + 7 + \frac{4}{9} + \frac{5}{8} = 19 + \frac{32}{72} + \frac{45}{72} = 19 + \frac{77}{72} = 19 + 1 + \frac{5}{72} = 20\frac{5}{72}$.

§. 18.

Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche.

Wenn ein gewöhnlicher Bruch in Decimalbruchtheile verwandelt werden soll, so ist er entweder ein ächter oder ein unächter.

I. Im ersten Falle enthält er keine Ganzen. Um seine Zehntel zu finden, setze man zur Rechten des Zählers eine Nulle und dividire mit dem Nenner in dieses Zehnfache des Zählers. Bleibt kein Rest, so ist der gegebene Bruch genau in Zehntel ausgedrückt. Entsteht aber ein Rest, so hänge man wieder

eine Nulle an ihn, dividire mit dem Nenner in die erhaltene Zahl, so gibt der Quotient die Hunderttel. Auf diese Weise fahre man fort, bis sich die Division entweder schlieset, oder bis man so kleine Decimaltheilchen erhält, daß sie der Schärfe der Rechnung genügen. Siehe Beyspiel I. II. III. und IV.

II. Ist aber der gegebene Bruch ein unächter, so bestimme man zuerst seine Ganzen, und sodann nach I. die fernern Decimalbruchtheile. Siehe Beyspiele V. und VI.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens leuchtet von selbst ein.

Beyspiele.

I. $\frac{3}{5} = 0, \frac{30}{5} = 0, 6.$

II. $\frac{7}{8} = 0, \frac{7000}{8} = 0,875.$

III. $\frac{5}{12} = 0, \frac{5000000}{12} \ldots = 0, 416666 \ldots$

IV. $\frac{5}{7} = 0, \frac{5000000}{7} \ldots = 0, 71423571 \ldots$

V. $\frac{124}{9} = 13 + \frac{7}{9} = 0, \frac{70000}{9} \ldots = 0,$ 7777 . . . Daher ist $\frac{124}{9} = 13{,}7777 \ldots$

VI. $\frac{423}{8} = 52\frac{7}{8} = 52{,}875$

III. Wenn die zu addirenden gemeinen Brüche folgende sind: $\frac{3}{8}, \frac{17}{9}, \frac{3}{11}$, und $\frac{1}{4}$, so kann man die Addition sehr bequem dadurch verrichten, daß man dieselben zuerst in Decimalbrüche verwandelt und sodann addirt. Es ist nämlich:

$$\frac{3}{8} = 0,\ 375$$

$$\frac{17}{9} = 1,\ 8888888 \ldots$$

$$\frac{3}{11} = 0,\ 2727272 \ldots$$

$$\frac{12}{7} = 1,\ 7142857 \ldots$$

$$\frac{1}{4} = 0,\ 25$$

4, 5009017 . . . . Summe, welche

bis auf die Stelle der Milliontel genau ist. Um sich von der Kürze dieser Rechnung zu überzeugen, addire man die gemeinen Brüche auf gewöhnliche Weise. Verwandelt man nun diese Summe in einen Decimalbruch, so muß man den obigen erhalten.

§. 19.

Die Subtraction in Brüchen.

Es ist klar, daß die zu subtrahirenden Brüche ebenfalls gleichartig seyn müssen. Es haben hierbey folgende Hauptfälle Statt.

I. Wenn die zu subtrahirenden Brüche einerley Nenner haben, so ziehe man den kleinern Zähler von dem größern ab, und setze den Nenner unter die Differenz. Offenbar ist $\frac{7}{12} - \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$, so wie 7 Gulden weniger 2 Gulden soviel als 5 Gulden sind. Da durch den Abzug die Art der Bruchtheile nicht verändert wird, so muß auch der Nenner unverändert bleiben.

Sind aber die gegebenen Brüche ungleichartig, so bringe man sie zu gleicher Benen-

nung und verfahre ebenso. Z. B. $\frac{12}{19} - \frac{7}{15}$ $= \frac{12 \times 15}{19 \times 15} - \frac{7 \times 19}{15 \times 19} = \frac{180 - 133}{285} =$ $\frac{47}{285}$ u. s. w.

II. Soll man einen Bruch von einer ganzen Zahl abziehen, so ist er entweder ein ächter oder ein unächter. Im ersten Falle lehne man 1 von der Zahl, verwandle es in einen Bruch, der mit dem abzuziehenden gleichartig ist, und verrichte die Subtraction. Z. B. $8 - \frac{5}{7} = 7 + \frac{7}{7} - \frac{5}{7} = 7 + \frac{2}{7}$ oder $20 - \frac{5}{12} = 19 + \frac{12}{12} - \frac{5}{12} = 19$ $+ \frac{7}{12}$. — Im zweyten Falle bestimme man die Ganzen des abzuziehenden Bruchs und ziehe sie von den gegebenen Ganzen ab. Enthält nun der abzuziehende Bruch noch Bruchtheile, so verfahre man wie im vorigen Falle. Z. B. $15 - \frac{20}{5} = 15 - 4 = 11$;

oder $18 - \frac{17}{3} = 18 - 5 - \frac{2}{3} = 12 + \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{1}{3}$ u. s. w.

III. Soll eine ganze Zahl von einem Bruche abgezogen werden, so ist dies nur dann möglich, wenn der Bruch ein unächter ist und selbst mehr Ganze, als die Zahl enthält. Z. B. $\frac{19}{3} - 5 = 6\frac{1}{3} - 5 = 1\frac{1}{3}$

IV. Wenn man Ganze nebst Brüchen von Ganzen und Brüchen abziehen soll, so kann man die Zahlen zuerst einrichteu, dann die Brüche gleichartig machen und endlich subtrahiren. Z. B. $5\frac{2}{3} - 2\frac{5}{7} = \frac{17}{3} - \frac{19}{7} = \frac{119 - 57}{21} = \frac{62}{21} = 2\frac{20}{21}$. Wäre der Bruch an der abzuziehenden Zahl kleiner, als jener an der andern Zahl, so ziehe man die Ganzen, und auch die Brüche von einander ab. Z. B. $18\frac{3}{4} - 12\frac{1}{2} = 18 - 12 + (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) = 6 + (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) = 6 + \frac{6 - 4}{8} =$

$6 + \frac{2}{8} = 6 + \frac{1}{4}$ u. s. w.

V. Auch kann die Subtraction gemeiner Brüche bequemer ausgeführt werden, wenn man sie zuvor in Decimalbrüche verwandelt und sie sodann abzieht. Z. B.

I. $\frac{7}{12} - \frac{4}{15} = 0,58333 \ldots - 0,26666 \ldots$
$= 0,31667 \ldots .$

II. $8 - \frac{157}{28} = 8 - 5,60716 \ldots = 2,39284 \ldots .$

III. $216\frac{8}{11} - 87\frac{7}{15} = 126,727272 - 87,466666 = 39,260606.$

§. 20.

Die Multiplication in gemeinen Brüchen.

I. Um zwey gegebene Brüche mit einander zu multipliciren, multiplicire man sowohl ihre Zähler, als auch ihre Nenner. Jenes Product gibt den Zähler, dieses den Nenner

des zu suchenden Factums Soll man z. B. $\frac{4}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, so heißt dieses soviel als $\frac{4}{5}$ soll $\frac{2}{3}$mal genommen werden d. h. man soll von $\frac{4}{5}$ den 3ten Theil 2mal nehmen. Nun ist aber der 3te Theil von $\frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ und diesen $\frac{4}{15}$ zweymal genommen gibt $\frac{8}{15}$ als das zu findende Product. Hieraus folgt, daß das Product aus zwey ächten Brüchen kleiner, als jeder der Factoren sey. Denn im obigen Beyspiele wird $\frac{4}{5}$ nicht einmal ganz, sondern von $\frac{4}{5}$ nur $\frac{2}{3}$ d. h. ein Stück genommen. Desgleichen wird auch $\frac{2}{3}$ nur $\frac{4}{5}$mal d. h. weniger als einmal genommen. Das Product $\frac{8}{15}$ muß daher kleiner als $\frac{2}{3}$ und kleiner als $\frac{4}{5}$ seyn,

wie man auch schon daraus erkennt, daß $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ und $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ ist. Sind aber die Factoren unächte Brüche, so wird das Product größer, als jeder von ihnen ist.

II. Soll man mehr als zwey Brüche multipliciren, so bilde man ein Product aus allen Zählern, welches den Zähler des neuen Bruches, und ein Product aus allen Nennern, welches den Nenner des neuen Bruchs gibt. Z. B. $\frac{7}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{7 \times 4 \times 2}{9 \times 5 \times 3}$ $= \frac{56}{135}$ u. s. w.

III. Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so multiplicire man entweder mit dieser Zahl seinen Zähler, oder man dividire mit ihr, wenn es ohne Rest geschehen kann, in seinen Nenner. Z. B. $\frac{7}{12} \times 8 = \frac{56}{12} = 4\,\frac{8}{12} = 4\,\frac{2}{3}$; oder $\frac{9}{30} \times 5$ $= \frac{9}{6}$ $1\,\frac{1}{2}$ u. s. w.

IV. Um Ganze und Brüche mit Ganzen und Brüchen zu multipliciren, kann man die Factoren zuerst einrichten und dann nach dem Vorigen verfahren. Z. B. $8\frac{7}{11} \times 6\frac{3}{7} = \frac{95}{11} \times \frac{45}{7} = \frac{95 \times 45}{11 \times 7} = \frac{4275}{77} = 55\frac{40}{77}$ u. s. w.

§. 21.

Behandlung der Brüche benannter Zahlen.

Hierher gehören jene Fälle, wo Brüche von höheren Wertharten in Einheiten der niedrigern verwandelt werden sollen. Z. B.

I. Wie viele Kreutzer betragen $\frac{7}{9}$ eines Gulden? Weil 1 Gulden = 60 Kr., so ist $\frac{7}{9}$ Gulden = $\frac{7 \times 60}{9}$ Kr. = $\frac{420}{9} = 46\frac{6}{9} = 46\frac{2}{3}$ Kr. Aber, wie viele Pfennige machen $\frac{2}{3}$ Kr?

Weil 1 Kr. = 4 Pf., so ist $\frac{2}{3}$ Kr. = $\frac{2 \times 4}{3}$ Pf. = $\frac{8}{3}$ = $2\frac{2}{3}$ Pf. Folglich ist $\frac{7}{8}$ Guld. = 46 Kr. nebst zwey und $\frac{2}{3}$ Pfennigen.

II. Wie viele Pfunde sind $\frac{14}{25}$ des Centners? Hier ist $\frac{14}{25}$ Cent. = $\frac{14 \times 100}{25}$ ℔ = $\frac{1400}{25}$ ℔ = 56 ℔

III. Wie viel Lothe betragen $\frac{28}{39}$ eines Pfundes? Dies gibt $\frac{28}{39}$ ℔ = $\frac{28 \times 32}{39}$ Lothe = $\frac{896}{39}$ = 22 und $\frac{38}{39}$ Lothe = 22 Lothe + $\frac{38 \times 4}{39}$ Quent. = 22 Lothe $\frac{152}{39}$ Quent. = 22 Lothe 3 und $\frac{35}{39}$ Quent.

IV. Auch kann man die hier gefundenen Brüche leicht in Decimalbruchtheilen aus-

drücken. Da z. B. $\frac{7}{9}$ des Gulden so viel als 46 $\frac{2}{3}$ Kr. betragen, so ist auch $\frac{7}{9}$ Gulden = 46,666 . . . Kr. Ebenso sind $\frac{28}{39}$ des ℔ so viel als 22 $\frac{38}{39}$ Lothe. Dies gibt $\frac{28}{39}$ ℔ = 22,974 . . . Lothe u. s. f.

V. Auch könnte man fragen, wie viel die bestimmte Menge einer niedern Werthart in Decimalbruchtheilen einer gegebenen höhern betrage; z. B. Wie viele Zehntheile des Gulden sind 7 Kr.? Da ein Gulden = 60 Kr., so ist 1 Kr. = $\frac{1}{60}$ = 0,01666 . . . Gulden. Daher sind 7 Kr. = 0,01666 X 7 = 0,11662 .. Gulden. — Ferner: wie viele Decimaltheile des ℔ sind 18 Lothe? Da 1 ℔ = 32 Lothe, so ist ein Loth = $\frac{1}{32}$ = 0,03125 ℔ ohne Rest. Folglich sind diese 18 Lothe = 0,03125 X 18 = 0,5625 des ℔.

§. 22.

Die Division in gemeinen Brüchen.

Bey der Division in gemeinen Brüchen können nachfolgende Hauptfälle Statt finden.

I. Wenn der Divisorbruch mit dem Dividenden einerley Nenner hat, so findet man den Quotienten der Brüche, wenn man mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividenden dividirt. Wenn z. B. $\frac{12}{19}$ durch $\frac{4}{19}$ dividirt werden soll, so ist klar, daß jener Bruch 3mal größer als dieser ist, weil dessen Zähler 3mal mehr Einheiten hat, als der des Divisors. Daher ist $\frac{12}{19} : \frac{4}{19} = 3$ Desgleichen $\frac{18}{25} : \frac{7}{25} = 18 : 7 = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$. Oder $\frac{7}{12} : \frac{11}{12} = 7 : 11 = \frac{7}{11}$ u. s. w.

II. Sollen zwey ungleichartige Brüche mit einander dividirt werden, so kehre man den Divisorbruch um, d. h. man setze seinen Zähler als Nenner, und seinen Nenner als Zähler.

und multiplicire nun beyde Brüche wie gewöhnlich. Z. B. $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{14}$.

Denn wenn man den Bruch $\frac{5}{7}$ mit 2 dividiren sollte, so müßte er 2mal kleiner werden und dies geschähe, wenn man den Nenner 7 mit 2 multiplicirte. Nun soll aber $\frac{5}{7}$ nicht mit 2, sondern mit $\frac{2}{3}$ d. h. mit dem 3ten Theile von 2 dividirt werden; daher muß das Vorige wiederum mit 3 multiplicirt werden, wodurch obige Auflösung gerechtfertigt ist, da ein Bruch 3mal größer wird, wenn man seinen Zähler mit 3 multiplicirt.

Auch kann man diesen Beweis so führen: $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} : \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = 5 \times 3 : 2 \times 7 = \frac{5 \times 3}{2 \times 7} = \frac{5 \times 3}{7 \times 2} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{14}$ wie vorhin.

III. Hieraus folgt, daß der Quotient, welcher aus der Division mit einem Bruche ent,

steht, größer seyn muß, als der Dividend. Denn wenn man eine Zahl mit 1 dividirt, so ist der Quotient dem Dividenden gleich; folglich muß, wenn man mit etwas, was kleiner als 1 ist, dividirt, der Quotient größer als der Dividend seyn, z. B. $\frac{7}{9} : \frac{4}{5} = \frac{7}{9} \times \frac{5}{4} = \frac{35}{36}$. Es ist aber $\frac{7}{9} = \frac{28}{36}$ und daher kleiner als $\frac{35}{36}$.

IV. Um einen gegebenen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren, kann man entweder mit dieser Zahl seinen Zähler dividiren, oder, wenn dies nicht ohne Rest geschehen könnte, seinen Nenner damit multipliciren z. B. $\frac{20}{37} : 5 = \frac{4}{37}$, oder $\frac{8}{13} : 3 = \frac{8}{39}$ u. s. w.

V. Sollte dagegen eine ganze Zahl mit einem Bruche dividirt werden, so kehre man den Divisorbruch ebenfalls um, und multiplicire nun den neuen Bruch mit der Zahl. Z. B. $8 : \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{56}{5} = 11\frac{1}{5}$. Denn wenn

man 8 durch $\frac{1}{7}$ dividiren sollte, so würde man 56 zum Quotienten erhalten. Da aber $\frac{5}{7}$ fünfmal größer als $\frac{1}{7}$ ist, so muß auch der vorige Quotient 56 wiederum 5mal kleiner werden, welches $56 : 5 = 11\frac{1}{5}$ gibt.

VI. Wenn man Ganze und Brüche dividiren soll, so richte man den Dividenden und Divisor zuerst ein, und dividire sodann wie gewöhnlich. Z. B. $8\frac{5}{7} : 5\frac{8}{9} = \frac{61}{7} : \frac{53}{9}$ $= \frac{61}{7} \times \frac{9}{53} = \frac{549}{371} = 1\frac{178}{871}$ u. s. w.

Sechstes Buch.

Die Buchstabenrechnung.

§ 1.

Entgegengesetzte, positive und negative Größen.

Es gibt Größen von einerley Art, welche in einer solchen Beziehung gegen einander stehen, daß eine die andere vermindert, oder ganz und gar aufhebt. Dahin gehören z. B. Vermögen und Schulden, Vorwärts- und Rückwärtsgehen, Hinauf- und Hinabsteigen u. s. f. Das Vermögen nämlich wird durch die Schulden, und die Schuld durch das Vermögen vermindert oder gänzlich aufgehoben. Solche Größen nennt man entgegengesetzte und die eine von ihnen heißt die positive oder bejahende, die andere die negative oder die

verneinende. Wenn z. B. das Vermögen als bejahend gedacht wird, so sind die Schulden das Verneinende und man kann sagen, die Schulden seyen negatives Vermögen, so wie man das Vermögen eine negative Schuld nennen kann.

§. 2.

Bezeichnung entgegengesetzter Größen.

Weil die Natur der entgegengesetzten Größen in ihrem wechselseitigen Gegensatze besteht, zwischen der Addition und Subtraction aber ebenfalls ein solcher Gegensatz herrscht, so dienen auch die Zeichen + und — zur Darstellung entgegengesetzter Größen; so zwar, daß die positiven Größen das Zeichen +, die negativen aber — erhalten. Befindet sich vor einer Zahl kein Zeichen, so versteht man + darunter. Es heißt demnach + 8 soviel, als eine Menge von 8 positiven Einheiten und — 12 stellt eine Zahl von 12 negativen Einheiten vor.

§. 3.

Folgerungen aus dem Vorhergehenden.

I. Da man alle mögliche Größen durch Zahlen ausdrücken kann, so lassen sich die Rechnungsregeln mit entgegengesetzten Größen bequem und faßlich in entgegengesetzten Zahlen entwickeln.

II. Wenn man 2 gleiche entgegengesetzte Zahlen zusammenfaßt, so heben sie sich auf und werden = 0 z. B. + 5 — 5 = 0.

III. Sind aber entgegengesetzten Größen ungleich, so hebt die kleinere so viel, als sie selbst beträgt, in der größern auf und die hieraus entstehende Differenz ist von der Art der größern, d. h. positiv oder negativ, nachdem sie selbst positiv oder negativ ist z. B. + 20 — 8 = + 12 und + 7 — 18 = — 11 u. s. f.

IV. Auch ist klar, daß die Summe aller positiven Größen eine positive, die Summe mehrerer negativen aber eine negative Bedeutung habe, z. B. + 7 + 3 + 10 + 2 = + 22 und — 3 — 10 — 7 = — 20.

§. 4.

Addition entgegengesetzter Zahlen.

Um mehrere entgegengesetzte Zahlen zu addiren, bringe man sowohl alle positive, als auch alle negative in eine Summe. Sind beyde Summen gleich, so ist die Hauptsumme = 0; sind sie aber ungleich, so nehme man die kleinere von der größern weg und gebe ihr das Zeichen der größern.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht auf den so eben entwickelten Vordersätzen.

Beyspiele.

I. $+ 7 + 4 - 8 + 12 - 9 + 6 - 20 + 5 - 3 = 7 + 4 + 12 + 6 + 5 - 8 - 9 - 20 - 3 = + 34 - 40 = - 6.$

II.
$$\left.\begin{array}{rrrrr} +8 & -12 & -14 & -7 & -3 \\ -9 & +10 & -3 & +7 & +12 \end{array}\right\} \text{zu addiren.}$$
$$\begin{array}{rrrrr} -1 & -2 & -17 & 0 & +9 \end{array} \text{ Summe.}$$

Das erste Beyspiel könnte auch so berechnet werden, daß man sagte: + 7 und + 4 gibt + 11, dazu − 8, gibt + 3, dazu + 12, gibt + 15 u. s. w. bis zum Ende.

Im II. Beyspiele könnte man auch sagen:

$$\begin{array}{l} +8-12-14+7-3\ -+14 \\ -9+10-\ 3-7+12=+\ 3, \text{ folglich ist} \\ \hline -1-\ 2-17\quad 0+9=-14+3. \end{array}$$

§. 5.

Subtraction entgegengesetzter Zahlen.

Um entgegengesetzte Zahlen von einander zu subtrahiren, verwandele man in der abzuziehenden Größe alle Zeichen in die entgegengesetzten, und addire sodann mit diesen verwechselten Zeichen. Denn wenn man z. B. von 12 die Zahl + 8 abziehen soll, so ist dies so viel, als wenn man zu dieser 12 die Zahl — 8 addirte, da man in jedem Falle 4 zum Resultate erhält. Eine positive Größe abziehen heißt demnach soviel, als die ihr gleiche negative addiren. Daher muß auch umgekehrt, eine negative Zahl subtrahiren so viel seyn, als die ihr gleiche positive addiren; wenn man z. B. von 12 die Zahl — 8 abzieht, so muß zu 12 + 8 addirt werden, wodurch die Differenz 20 wird.

Beyspiele.

I.	+ 8	− 15	− 12	+ 9	− 5	+ 7	abzuziehende Größen.
	+ 6	− 4	+ 9	− 12	+ 20	− 5	
	−	+	−	+	−	+	veränderte Zeichen.
	+ 2	− 11	− 21	+ 21	− 25	+ 12	Differenz.

II.	− 4	+ 1	− 5	− 10	− 8	+ 6	− 3	
	− 9	− 8	− 15	+ 7	− 9	+ 13	− 8	+ 6
	+	+	+	−	+	−	+	−
	+ 5	+ 9	− 10	− 17	+ 1	− 7	+ 5	− 6

Eine Probe über die Subtraction kann sehr leicht dadurch gemacht werden, daß man die abzuziehende Größe zu der Differenz addirt, um wieder diejenige zu erhalten, wovon der Abzug geschehen ist.

Man sieht zugleich, wie nunmehr auch eine größere Zahl von einer kleinern abgezogen werden könne, z. B.

$(+7) - (+12) = +7 - 12 = -5$ oder
$(-8) - (-10) = -8 + 10 = +2$ u. s. w.

§. 6.

Multiplication entgegengesetzter Zahlen.

Bey der Multiplication entgegengesetzter Zahlen bemerke man in Rücksicht der Zeichen folgende 4 Regeln:

I. Zwey positive Factoren geben ein positives Product z. B. $+ 6 \times + 4 = + 24$. Denn $+ 6$ mit $+ 4$ multipliciren heißt, das Positive im positiven Sinne nehmen, oder, wie man zur Erläuterung sagen kann, die Bejahung bejahen, woraus wieder etwas Positives oder Bejahetes entstehen muß.

II. Zwey negative Factoren geben ein positives Product. z. B. $- 6 \times - 4 = + 24$. Denn $- 6$ mit -4 multipliciren heißt soviel, als die negative 6 viermal im negativen Sinne nehmen; oder soviel, als die Verneinung verneinen, wodurch etwas Positives oder Bejahetes entspringt.

III. Ein positiver Multiplicand und ein negativer Multiplicator geben ein negatives Product. z. B. $+ 6 \times - 4 = - 24$. Denn $+ 6$ mit $- 4$ multipliciren, ist nichts anders,

als die positive 6 viermal im negativen Sinne nehmen, wodurch ein negatives Product entstehen muß, so wie die Bejahung verneinen soviel als verneinen heißt.

IV. Ein negativer Multiplicand und ein positiver Multiplicator geben ein negatives Product. z. B. $-6 \times +4 = -24$. Denn -6 mit $+4$ multipliciren ist soviel, als die negative 6 viermal im positiven d. h. in dem ihr eigenthümlichen Sinne nehmen, welches offenbar etwas Negatives gibt. Hier kann man sagen: Die Verneinung bejahen, heißt verneinen.

V. Diese 4 Regeln lassen sich kurz so ausdrücken: einerley Zeichen der Factoren geben ein positives, verschiedene Zeichen aber ein negatives Product.

Beyspiele.

I. -3	$+5$	-6	-10	$+2$	Multiplic.
-4	$+3$				Multiplicator.
$+12$	-20	$+24$	$+40$	-8	Product.
-9	$+15$	-18	-30	$+6$	

II. $\begin{array}{rrrrr} +7 & -3 & -5 & -10 & +8 \\ -4 & +6 & -7 & -3 & \end{array}$ Factoren.

$\begin{array}{rrrrr} -28 & +12 & +20 & +40 & -32 \\ +42 & +18 & +30 & -60 & +48 \\ -49 & +21 & +35 & +70 & -56 \\ -21 & +9 & +15 & +30 & -24 \end{array}$ Product

Eine Probe über die Multiplication kann man dadurch machen, daß man beyde Factoren auf 2 Zahlen reducirt, deren jede jeder von ihnen gleich ist, diese Zahlen mit einander multiplicirt und zusieht, ob das Product derjenigen Zahl ist, welche man aus Reduction aller Glieder des vorigen Productes erhält z. B.

Factoren. $\begin{array}{rrrrl} +5 & -8 & +3 & -7 & = -7 \\ -6 & +9 & & & = +3 \end{array}$

Theilfacta. $\begin{array}{rrrrl} -30 & +48 & -18 & +42 & \\ +45 & -72 & +27 & -63 & = -21 \end{array}$

Denn das Product ist $= +48 + 42 + 45 + 27 - 30 - 18 - 72 - 63 = 162 - 183 = -21$.

§. 7.

Division entgegengesetzter Zahlen.

Die Ausführung der Division in entgegen-

gesetzten Zahlen beruht hauptsächlich auf der Anwendung folgender 4 Regeln:

I. Wenn der Dividend und der Divisor positiv ist, so wird der Quotient auch positiv. Z. B. + 48 : + 8 = + 6. Denn da 8 positive Einheiten in 48 positiven wirklich enthalten sind, so muß auch der Quotient positiv seyn. Wäre er negativ, so müßte, nach der gewöhnlichen Divisionsprobe, dieser negative Quotient, mit dem positiven Divisor multiplicirt, ein positives Product geben, welches, nach dem vorigen §, unmöglich ist.

II. Ein negativer Dividend und ein negativer Divisor geben einen positiven Quotienten. Z. B. — 48 : — 8 = + 6. Denn — 48 durch — 8 dividiren heißt, untersuchen, wie oft — 8 von — 48 abgezogen werden kann. Da nun dieser Abzug wirklich 6mal geschehen kann, so muß auch der Quotient positiv werden. Wäre er negativ, so müßte dieser negative Quotient, mit dem negativen Divisor multiplicirt, einen negativen Dividenden geben, was nach dem vorigen §. unmöglich ist.

III. Wenn der Dividend positiv, der Divisor aber negativ ist, so wird auch der Quotient negativ. Z. B. + 48 : — 8 = — 6. Denn — 8 kann von + 48 nicht selbst, sondern nur im entgegengesetzten Sinne abgezogen werden; daher muß auch der Quotient dieses Entgegengesetzte ausdrücken, d. h. negativ seyn. Wäre er positiv, so müßte das Product aus ihm in den negativen Divisor den positiven Dividenden hervorbringen, welches unmöglich ist, da dieses Product nach dem vorigen §. negativ seyn muß.

IV. Aus einem negativen Dividenden und einem positiven Divisor entspringt ein negativer Quotient. Z. B. — 48 : + 8 = — 6. Denn hier kann man die + 8 nicht im positiven, sondern nur im negativen Sinne von — 48 abziehen, daher muß auch der Quotient dieses Negative andeuten d. h. er muß negativ seyn. Wollte man ihn positiv nehmen, so müßte der positive Quotient, mit dem positiven Divisor multiplicirt, den negativen Dividenden hervorbringen, was aber nicht möglich ist.

V. Vorstehende Regeln lassen sich in eine zusammenziehen: Einerley Zeichen am Dividend und Divisor geben einen positiven, verschiedene Zeichen aber einen negativen Quotienten.

Beyspiele.

I. Divisor. Dividend.

$-4 \mid -12 + 20 - 48 - 60 + 36 \,($

Quotient. $+3 - 5 + 12 + 15 - 9$

II. $\frac{-18 + 12 - 6}{-3} = +6 - 4 + 2.$

III. Divisor Dividend.

$+5 \mid -20 - 60 + 3 - 100 - 2 \,($

Quotient. $-4 - 12 + \frac{3}{5} - 20 - \frac{2}{5}$

IV. Divis. Dividend.

$-3 + 2 \mid +12 - 21 - 36 - 8 + 14 + 24 \,($

Quotient. $-4 + 7 + 12$

$+12 \qquad -8$

$-21 - 36 + 14 + 24$

$-21 \qquad + 14$

$$\begin{array}{r} -36+24 \\ -36-24 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

Auch über die Division läßt sich die Probe dadurch machen, daß man mit dem reducirten Divisor in den reducirten Dividenden dividirt und untersucht, ob der reducirte Quotient zum Vorschein kömmt. Im obigen IV. Beyspiele ist der Divisor $= -3 + 2 = -1$ der Dividend $= +12 - 21 - 36 - 8 + 14 + 24 = -15$ und der Quotient $= -4 + 7 + 12 = +15$. In der That ist auch $-15 : -1 = +15$.

In diesen Rechnungen mit entgegengesetzten Zahlen ist den Anfängern eine mehrfache Uebung zu empfehlen, weil sie vorbereitend zur Buchstabenrechnung sind, wovon nun gehandelt wird.

§. 8.

Begriff der Buchstabenrechnung.

Aus dem Bisherigen ist hinreichend klar geworden, daß die Ziffer solche Zahlzeichen sind, welche nur bestimmte Mengen von

Einheiten darstellen. Die Ziffer 6 z. B. kann nie mehr oder weniger als sechs Einheiten, die Summe 8 + 5 nie mehr oder weniger, als dreyzehn Einheiten ausdrücken. Daher sind alle Zifferzahlen etwas Einzelnes, durch sich selbst genau Bestimmtes, und können somit keine Zahlen im Allgemeinen darstellen, d. h. keine allgemeine Resultate gewähren. Da es aber sehr wichtig ist, allgemeine Regeln in der Arithmetik aufzufinden, welche sich nicht blos auf einen Fall, sondern auf eine sehr große Menge von Fällen beziehen, so kam man auf den glücklichen Gedanken, die Buchstaben als allgemeine Zeichen der Zahlen anzunehmen. Man kann sich nämlich unter a jede beliebige Zahl, unter b jede andere von a verschiedene, unter a + b jede zweytheilige Summe, unter c — d jede Differenz, unter m X n jedes Product aus 2 Factoren, unter a : b jeden Quotienten, so wie unter $\frac{m}{n}$ jeden Bruch vorstellen. Hieraus entsteht die Buchstabenrechnung, als jener Theil der Arithmetik, welcher lehrt, wie man die verschiedenen Rechnungsopera-

tionen in Buchstaben ausführen kann. Ihr Nutzen ist sehr groß, da man durch sie die sogenannten Formeln d. h. allgemeine Regeln erhält, welche sich über unzählig viele einzelne Fälle erstrecken.

§ 9.

Coefficienten und Exponenten der Buchstaben.

Unter Coefficient eines Buchstaben versteht man eine Ziffer, welche zu seiner Linken gesetzt wird und andeutet, wie oft dieser Buchstabe vorhanden ist. So heißt in dem Ausdrucke 5 a die 5 der Coefficient von a, welcher andeutet, daß a fünfmal vorhanden ist; oder $5a = a + a + a + a + a = 5 \times a$. Der Ausdruck 6 ab bedeutet, daß das Product aus a in b sechsmal genommen werden soll; oder $6ab = ab + ab + ab + ab + ab + ab = 6 \times ab$.

Wenn ein Buchstabe mehrmal mit sich selbst multiplicirt wird, so nennt man die hieraus entstehenden Producte die Potenzen jenes

Buchstaben, und zwar die 2te, 3te, 4te Potenz, je nachdem derselbe 2, 3 oder 4mal als Factor vorkömmt. So ist a X a die 2te Potenz von a; aber a X a X a die 3te, a X a X a X a die 4te Potenz von a u. s. w. Um diese Potenzen bequemer zu bezeichnen, schreibt man a^2 für a X a; a^3 für a X a X a; a^4 für a X a X a X a, und nennt diese kleine zur Rechten der Buchstaben stehenden Ziffer die Exponenten der Potenzen. Setzt man für diese Buchstaben bestimmte Zahlen, so dient dieses zur Erläuterung. Für a = 3, wird $a^2 = 3^2 = 3 \times 3 = 9$, $a^4 = 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, u. s. w.

§. 10.

Addition in Buchstaben-Größen.

Um Buchstaben-Größen mit verschiedenen Zeichen zu addiren, unterscheide man, ob die nämlichen Buchstaben mehrmal vorkommen oder nicht. Im letzten Falle kann man ihre Addition nur dadurch andeuten, daß man sie, nach alphabetischer Ordnung, mit ihren Zeichen neben einander stellt. Um

z. B. $+ a - 3f + 2g - bd + h$ zu addiren, schreibe man diese Größen, alphabetisch geordnet, neben einander; nämlich $+ a - bd - 3f + 2g + h$. Denn es ist klar, daß die Buchstaben keinen Stellenwerth haben.

Sollte man z. B. a und $\frac{m}{n}$ und $+ 3b$ und $- d$ addiren, so ist die Summe $= a + 3b - d + \frac{m}{n}$ u. s. f.

Im ersten Falle aber stelle man die gleichartigen Buchstaben zusammen, und reducire sie nach den Regeln der entgegengesetzten Größen. So ist z. B. $+ 3a - a = + 2a$; $- 3b + 2b = - b$; $3\,ab + ab - 5\,ab = 4\,ab - 5\,ab = - ab$ u. s. f. wie nachfolgende Beyspiele zeigen.

I. Wenn man zu $3a - b + 3g - d + 2f$ die Größe $+ 5b - 2a - 5f - g + 3d$ addiren soll, so ordne man sie zuerst gehörig, wie folgt:

$$\begin{array}{l} 3a - b - d + 2f + 3g \\ - 2a + 5b + 3d - 5f - g \\ \hline a + 4b + 2d - 3f + 2g \end{array}$$

nun reducire man

Summe.

II.

$$\left.\begin{array}{rrrr} 2a & -\ 3b & +\ 6d & -\ g \\ -\ 5a & +\ 4b & -\ 2d & +\ 2g \\ 4a & -\ b & +\ d & \\ -\ 2a & +\ 2b & -\ 2d & -\ h \end{array}\right\}\text{ zu addiren.}$$

$$-\ a + 2b + 3d + g - h \text{ Summe.}$$

III.

$$\left.\begin{array}{rrr} 3a & +\ 2b & -\ 6c \\ -\ a & -\ 5b & \end{array}\right.\text{ zu addiren.}$$

$$2a - 3b - 6c \text{ Summe.}$$

Zur Erläuterung dieser Rechnung kann man den Buchstaben bestimmte Werthe in benannten Zahlen geben und in dem letzten Beyspiele unter a Gulden, unter b Kreutzer und unter c Pfennige sich denken, wodurch $3a + 2b - 6c$ = 3 Gulden + 2 Kreutzer — 6 Pfennige = 722 Pf. würde. Auf gleiche Weise lassen sich auch die andern Buchstaben-Größen ausdrücken.

§. 11.

Subtraction in Buchstaben-Größen.

Bey der Subtraction in Buchstaben-Größen haben zwey Hauptfälle Statt:

I. Wenn die abzuziehende Größe keine Buchstaben mit jener, wovon man abziehen soll, gemein hat, so verändere man in jener alle Zeichen in die entgegengesetzten und ordne nun sämmtliche Buchstaben nach dem Alphabete; oder

II. Beyde Größen haben gemeinschaftliche Buchstaben. Nachdem man sie nun alphabetisch geordnet und gehörig unter einander gestellt hat, werden in der abzuziehenden alle Zeichen in die entgegengesetzten verändert, und nun diese Größen addirt.

Beyspiele.

I. Man soll von $a + 3b - d$ abziehen die Größen $- m + c - g$, so ist $(a + 3b - d) - (m + c - g) = (a + 3b - d) + (m - c + g) = a + 3b - c - d + m + g$ die richtige Differenz.

II. Von $- g + 3f + 4a$ soll man abziehen $- 2b + 3d - c + h$, so ist $(- g + 3f + 4a) - (2b + 3d - c + h) = (- g + 3f + 4a) - (+ 2b - 3d + c - h) = 4a - 2b + c - 3d + 3f - g - h$.

III. Von $3b - 4c + 5a - d + 2g$ soll abgezogen werden $-3g + 2a - 4b + d - 3c + f$, so ist die Rechnung diese:

$$\left.\begin{array}{llllll} +5a & +3b & -4c & -d & +2g & \\ +2a & -4b & -3c & +d & -3g & +f \\ - & + & + & - & + & - \end{array}\right\} \text{geordnet.}$$

$$\begin{array}{llllll} +3a & +7b & -c & -2d & +5g & -f \end{array} \text{ Differenz.}$$

IV. Von $12a - 8b + 7c - 4d + g$ soll man abziehen $15a - 8b - 9c - 6d$. Dies gibt

$$\left.\begin{array}{lllll} 12a & -8b & +7c & -4d & +g \\ 15a & -8b & -9c & -6d & \\ - & + & + & + & \end{array}\right\} \text{geordnet.}$$

$$\begin{array}{lllll} -3a & 0 & +16c & +2d & +g \end{array} \text{ Differenz.}$$

§. 12.

Multiplication der Potenzen von gleichen Wurzeln.

I. Man nennt Potenzen von gleichen Wurzeln jene, welche dadurch entstehen, daß der nämliche Buchstabe mehrmal mit sich selbst multiplicirt wird; so sind z. B. a^2, a^3, a^5 Potenzen von einerley Wurzeln, denn

sie entspringen sämmtlich aus der Wurzelgröße a. Dagegen sind a^2, b^3 Potenzen von verschiedenen Wurzeln, da jene aus der Wurzel a, diese aus b entstanden ist.

II. Sollen nun Potenzen von verschiedenen Wurzeln multiplicirt werden, so läßt sich diese Multiplication nicht abkürzen, sondern nur dadurch andeuten, daß man die gegebenen Factoren mit dem Multiplicationszeichen verbindet. Das Product aus a^2 in b^3 ist daher $= a^2 \times b^3 = a^2 b^3$.

III. Haben aber die zu multiplicirenden Potenzen einerley Wurzel, so findet man das Product, wenn man die Wurzel einmal und neben sie einen Exponenten setzt, welcher der Summe der Exponenten der Factoren gleich ist. So ist z. B. $a^2 \times a^3 = a^5$. Denn $a^2 = a \times a$ und $a^3 = a \times a \times a$; folglich $a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a$ d. h. $= a^5$. Allgemein ausgedrückt, ist $a^m \times a^n = a^{m+n}$ u. s. f.

IV. Soll eine Potenz zur neuen Potenz erhoben werden, so gebe man der neuen Wurzel einen Exponenten, welcher dem Producte

der 2 gegebenen Exponenten gleich ist. Z. B. $(a^2)^3 = a^{2+3} = a^6$. Denn $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^6$. Allgemein ist $(a^n)^m = a^{n+m}$ u. s. w.

V. Wenn ein Product auf eine Potenz erhoben werden soll, so erhebe man jeden Factor auf diese Potenz und multiplicire die potenzirten Factoren. Z. B. $(ab)^3 = a^3 \times b^3$. Denn $(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a \times a \times a \times b \times b \times b\ a^3 \times b^8$. Ganz allgemein ist $(ab^n) = a^n \times b^n$.

VI. Soll man einen Bruch potenziren, so darf man nur seinen Zähler und seinen Nenner auf die verlangte Potenz erheben.

Denn es ist z. B. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$. Allgemein ist wieder $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ u. s. w.

§. 13.

Multiplication in Buchstaben-Größen.

Um Buchstaben-Größen zu multipliciren, ordne man sie zuerst nach dem Alphabete,

schreibe sie unter einander, ziehe einen Strich, multiplicire jedes einzelne Glied des Multiplicanden mit jedem einzelnen Gliede des Multiplicators, indem man auf die Zeichen auf die Coefficienten und auf die Buchstaben sieht, und addire sodann alle Theilfacta, so erhält man, wie von sich selbst einleuchtet, das richtige Product. Folgende Beyspiele werden zur Erläuterung dienen.

$$\text{I.}\quad \left.\begin{array}{l} a + b \\ a + b \end{array}\right\} \text{Factoren.}$$

$$\left.\begin{array}{lll} a^2 + & ab & \\ + & ab & + b^2 \end{array}\right\} \text{Theilfacta.}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{Product.}$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{l} a - b \\ a - b \end{array}\right\} \text{Factoren.}$$

$$\left.\begin{array}{lll} a^2 - & ab & \\ - & ab & + b \end{array}\right\} \text{Theilfacta.}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{Product.}$$

$$\text{III.}\quad \left.\begin{array}{l} a + b \\ a - b \end{array}\right\}\ \text{Factoren.}$$

$$\left.\begin{array}{lll} a^2 + ab & & \\ \quad\; - ab & - b^2 & \end{array}\right\}\ \text{Theilfacta.}$$

$$a^2 - b^2 \quad \text{Hauptproduct.}$$

$$\text{IV.}\quad \left.\begin{array}{l} a + b - d \\ a - b - d \end{array}\right\}\ \text{Factoren.}$$

$$\left.\begin{array}{lllll} a^2 + ab - ad & & & & \\ \quad\; - ab & - b^2 & + bd & & \\ & \quad - ad & - bd & + d^2 & \end{array}\right\}\ \text{Theilfacta.}$$

$$a^2 - 2ad - b^2 + d^2 \quad \text{Product.}$$

$$\text{V.}\quad \left.\begin{array}{l} 5a - 2b - d \\ 2a + 3b - 2d \end{array}\right\}\ \text{Factoren.}$$

$$\left.\begin{array}{llllll} 10a^2 - 4ab - 2ad & & & & & \\ \qquad\quad 15ab & - 6b^2 & - 3bd & & & \\ & \quad - 10ad & + 4bd & + 2d^2 & & \end{array}\right\}\ \text{Theilfacta}$$

$$10a^2 + 11ab - 12ad - 6b^2 + bd + 2d^2 \quad \text{Prod.}$$

VI. $a^2 - 3b^2 + 2c - d$

$3a + 2b^2 - c^2$

$$3a^3 - 9ab^2 + 6ac - 3ad$$
$$2a^2b^3 - 6b^5 + 4b^3c - 2b^3d$$
$$- a^2c^2 - 3b^2c^2 - 2c^3 - b^2d$$

$3a^3 - 9ab^2 + 2a^2b^3 + 6ac - a^2c^2 - 3ad - 6b^5 + 4b^3c - 3b^2c^2 - 2b^3d - 2c^3 + c^2d.$

VII. $6a^n - 2b^m$

$4a^n - 3b^n$

$$24a^{2n} - 8a^nb^m - 18a^nb^m + 6b^{m+n}.$$

§. 14.

Division der Potenzen von gleichen Wurzeln.

I. Wenn man Potenzen von verschiedenen Wurzeln dividiren soll, so läßt sich diese Division nur andeuten. Z. B. a^2 dividirt durch b^3, gibt $a^2 : b^3$ oder auch $\frac{a^2}{b^3}$

II. Haben aber die Potenzen einerley Wurzel, so setze man diese Wurzel einmal und gebe ihr einen Exponenten, welcher dem

Unterschiede des Exponenten des Divisors von jenem des Dividenden gleich ist. Z. B. $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$. Denn $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$ und $a^3 = a \times a \times a$, folglich $a^5 : a^3 = aaaaa : aaa = aa = a^2$. Allgemein wird $a^m : a^n = a^{m-n}$.

III. Da $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$; aber $a^n : a^n$ auch $= 1$ ist, so muß $a^0 = 1$ seyn, und man sagt: jede Größe auf der Nullpotenz ist der Einheit gleich.

IV. Die Größe a^{-n} ist soviel als $\frac{1}{a^n}$. Denn es ist $a^m : a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n}$. Allein es ist auch $a^m : a^{m+n} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^n}$. Daher bedeuten Größen mit negativen Exponenten soviel als Brüche, deren Zähler 1, und deren Nenner eben diese Größen mit gleichen positiven Exponenten sind. In Zahlen ist z. B. $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$; $2^{-6} = \frac{1}{64}$; $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$ u. s. w.

V. Da $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ u. s. f. auch $10^0 = 1$ und $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$, $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ u. s. w. So kann man jede Zahl, welche aus Ganzen und aus Decimalbrüchen besteht, durch Ziffer ausdrücken, welche in Potenzen von 10 multiplicirt sind. Es ist z. B. $7345{,}8296 = 7 \times 10^{+3} + 3 \times 10^{+2} + 4 \times 10^{+1} + 5 \times 10^0 + 8 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3} + 6 \times 10^{-4}$ u. s. f.

VI. Noch ist hier die Bedeutung von Bruchexponenten zu erläutern, wonach z. B. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a}$ ist. Um diesen Ausdruck zu verstehen, bemerke man, daß das Zeichen $\sqrt{}$ die Wurzelausziehung bedeutet. Die Quadratwurzel einer Größe heißt nämlich die Zahl, welche, einmal mit sich selbst multiplicirt, jene Größe hervorbringt; ihre Cubicwurzel eine Zahl, welche, zweymal mit sich selbst multiplicirt, jene erste Zahl hervorbringt. So ist z. B. 4 die Quadratwurzel von 16, und 3 die Cubicwurzel von 27. Demnach ist die mte

Wurzel aus einer Größe eine Zahl, welche, mmal als Factor gesetzt, jene Größe bildet. Obiger Ausdruck $\sqrt[m/]{a}^{n}$ heißt daher soviel, als die mte Wurzel von a auf der nten Potenz.

Der Beweis beruht darauf, daß $a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{n}$. Allein $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m/]{a}$. Denn $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{m} = a^{\frac{m}{m}} = a^{1} = a$. Ebenso ist auch $\left(\sqrt[m/]{a}\right)^{m} = a$. Folglich ist auch $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ und $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m/]{a}^{n}$. Für einzelne Fälle ist z. B. $7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7}^{2} = \sqrt[3]{49}$; oder $8^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{8}^{4}$ u. s. w.

§. 15.

Division in Buchstaben-Größen.

Zur Auflösung der hierher gehörigen Fälle bemerke man folgende Regeln:

I. Wenn der Dividend und der Divisor keine Buchstaben gemein haben, so läßt sich die Division nur bruchweise andeuten.

II. Hat aber der Divisor nur einen Buchstaben und eben dieser Buchstabe kömmt auch in den einzelnen Gliedern des Dividenden vor, so setze man jene Buchstaben in den Quotienten, welche der Dividend mehr als der Divisor hat, und bemerke wegen der Zeichen die bekannten Regeln.

III. Wenn Dividend und Divisor aus mehreren Gliedern von zum Theil gleichen Buchstaben, mit verschiedenen Zeichen, Coefficienten und Exponenten bestehen, so ordne man zuerst die Buchstaben in beyden nach dem Alphabete, bestimme aus dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividenden den Quotienten, indem man a) die Zeichen nach den bekannten Regeln setzt, b) mit dem etwaigen Coefficienten des Divisors in jenen des Dividenden dividirt, c) die gemeinschaftlichen Buchstaben von beyden im Quotienten wegläßt, und d) wenn

etwa Potenzen von gleichen Wurzeln zu dividiren sind, den obigen Regeln folget.

IV. Mit dem nach III. jedesmal gefundenen Theile des Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor und subtrahire dieses Product von den gehörigen Theilen des Dividenden, bis entweder die Division sich schliesset, oder am Ende ein Rest bleibt, welchen man in Form eines Bruchs ausdrückt.

Die Richtigkeit dieser Regeln beruht auf dem Vorhergehenden und wird durch nachfolgende Beyspiele gehörig erläutert.

Beyspiele.

I. Man soll $a - b + c$ durch $m + n$ dividiren, so setze man den Quotienten in Form eines Bruchs, nämlich: $\frac{a - b + c}{m + n}$

II. Divis. Dividend. Quotient.

$a \mid 3a - a^2 + 4ab - ad \mid 3 - a + 4b - d$

Divis. Dividend.

III. $- b \mid - ab + 3b^2 - 4bd + c$

Quotient. $\mid + a - 3b + 4d + \frac{c}{-b}$

IV. $a + b \mid a^2 + 2ab + b^2 \, (a + b$

$$a^2 + ab$$

$$ab + b^2$$

$$ab + b^2$$

$$0 \quad 0$$

V. $a - b \mid a^2 - b^2 \, (a + b$

$$a^2 - ab$$

$$+ ab - b^2$$

$$+ ab - b^2$$

$$0 \quad 0$$

VI. $a + b - d \mid a^2 - 2ad - b^2 + d^2 \, (a - b - d$

$$a^2 + ab - ad$$

$$- ab - ad - b^2$$

$$- ab - b^2 + bd$$

$$- ad - bd + d^2$$

$$- ad - bd + d^2$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

VII. $2a + 3b - 2d$ Divisor.

$$| \; 10a^2 + 11ab - 12ad - 6b^2 + bd + 2d^2 \quad (5a - 2b - d$$

$$\underline{10a^2 + 15ab - 10ad}$$

$$-4ab - 2ad - 6b^2 + bd + 2d^2$$

$$\underline{-4ab \qquad - 6b^2 + 4bd}$$

$$-2ad - 3bd + 2d^2$$

$$\underline{-2ad - 3bd + 2d^2}$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

VIII. $a - b \mid a^3 - b^3 \mid a^2 + ab + b^2$

$$\underline{a^3 - a^2 b}$$

$$+ a^2 b - b^3$$

$$\underline{a^2 b - ab^2}$$

$$+ ab^2 - b^3$$

$$\underline{+ ab^2 - b^3}$$

$$0 \quad 0$$

IX. $1 - 2\mathfrak{x} + \mathfrak{x}^2$ Divisor.

$$1 - 5\mathfrak{x} + 10\mathfrak{x}^2 - 10\mathfrak{x}^3 + 5\mathfrak{x}^4 - \mathfrak{x}^5$$

$$(1 - 3\mathfrak{x} + 3\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^3$$

$$\underline{1 - 2\mathfrak{x} + \mathfrak{x}^2}$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
-3x + 9x^2 & -10x^3 & & & \\
-3x + 6x^2 & -3x^3 & & & \\
\hline
& 3x^2 & -7x^3 & +5x^4 & \\
& 3x^2 & -6x^3 & +3x^4 & \\
\hline
& & -x^3 & +2x^4 & -x^5 \\
& & -x^3 & +2x^4 & -x^5 \\
\hline
& & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Zusammengesetztere Beyspiele können sich die Anfänger leicht dadurch bilden, daß sie 2 willkührliche Factoren mit einander multipliciren, und das erhaltene Product sodann wieder mit einem dieser Factoren dividiren, um den andern als Quotienten zu erhalten; eine Uebung, welche sehr zu empfehlen ist.

Siebentes Buch.

Die Verhältnisse, Proportionen und Progressionen.

§. 1.

Begriff, Arten und Glieder des Verhältnisses ꝛc.

Man kann die Zahlen entweder blos an sich d. h. als bestimmte Mengen von Einheiten betrachten, oder auch eine mit der andern vergleichen. Die Vergleichung zweyer Zahlen in Rücksicht ihrer Größe, heißt das **Verhältniß** dieser Zahlen; die Zahlen selbst nennt man die **Glieder** des Verhältnisses. Man denke z. B. die Zahlen 18 und 6, so kann man dieselbe in Rücksicht ihrer wechsel-

seitigen Größe mit einander vergleichen, wodurch ihr Verhältniß bestimmt wird. Man findet z. B. daß 18 dreymal größer als 6 und 6 dreymal kleiner als 18; ferner, daß 18 um 12 größer als 6, die 6 aber um 12 kleiner als 18 ist. Die Zahlen 18 und 6 sind die Glieder des Verhältnisses. Hieraus sieht man schon, daß das Verhältniß von doppelter Art sey. Denn man bestimmt entweder, wie vielmal eine Zahl größer als die andere ist (durch die Division), oder man untersucht, um wie viele Einheiten die eine mehr beträgt, als die andere (durch die Subtraction). Jenes Verhältniß heißt ein geometrisches, dieses ein arithmetisches. Auch bedient man sich des Zeichens der Division und Subtraction, um diese Verhältnisse darzustellen. So heißt 24 : 8 das geometrische Verhältniß von 24 zu 8, und 15 — 10 das arithmetische Verhältniß von 15 zu 10; die Zahlen 24 und 15 nennt man die vorhergehenden, 8 und 10 aber die nachfolgenden Glieder. Die Zahl, welche in dem geometrischen Verhältnisse andeutet, wie vielmal größer das eine Glied, als das andere ist, heißt Exponent des Verhält-

nisses. In obigem Beyspiele ist er = 3. Eine Zahl aber welche in dem arithmetischen Verhältnisse anzeigt, um wie viel das eine Glied größer, als das andere ist, wird die Differenz des Verhältnisses genennt, welche in obigem Beyspiele = 5 ist.

Wenn die Glieder eines Verhältnisses gleich sind, so heißt es ein Verhältniß der Gleichheit; z. B. 5 : 5 oder 8 — 8; sind sie aber ungleich, ein Verhältniß der Ungleichheit, welches entweder vom Kleinern zum Größern, oder vom Größern zum Kleinern ist, je nachdem das vorhergehende Glied größer oder kleiner als das nachfolgende ist.

Die Verhältnisse 11 : 3, 20 : 5, 18 — 12, 7 — 5 u. s. f. sind Verhältnisse vom Größern zum Kleinern; die Verhältnisse 8 : 14, 12 : 25, 7 — 9, 10 — 14 u. s. w. vom Kleinern zum Größern.

Der allgemeine Ausdruck eines geometrischen Verhältnisses ist a : b, oder m : n, jener des arithmetischen aber a — b, oder c — d.

Auch liegt es in der Natur des Verhältnisses, daß seine Glieder gleichartig seyn müssen, da nur gleichartige Dinge mit einander verglichen werden können.

§. 2.

Folgerungen hieraus.

Aus dem Begriffe des arithmetischen und geometrischen Verhältnisses folgt:

I. Im arithmetischen Verhältnisse der Gleich. ist der Unterschied = 0; im geometrischen Verhältnisse der Gleichheit aber ist der Exponent = 1; z. B. $7 - 7 = 0$, $b - b = 0$, oder $6 : 6 = 1$, $a : a = 1$.

II. Im arithmetischen Verhältnisse vom Größern zum Kleinern ist die Differenz eine positive, im Verhältnisse vom Kleinern zum Größern aber eine negative Zahl z. B. $20 - 16 = 4$, $7 - 12 = - 5$ u. s. w.

Im geometrischen Verhältnisse vom Größern zum Kleinern ist der Exponent entweder eine reine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl mit einem ächten

Bruche. z. B. $20:4=5$, $38:7=5\frac{3}{7}$ u. s. w. Ist aber dieses Verhältniß vom Kleinern zum Größern, so ist der Exponent ein ächter Bruch; z. B. $8:13=\frac{8}{13}$, $9:15=\frac{9}{15}$ $=\frac{3}{5}$ u. s. w.

III. Im arithmetischen Verhältnisse der Ungleichheit findet man das erste Glied, wenn das zweyte Glied zur Differenz addirt; das zweyte Glied aber, wenn vom ersten die Differenz subtrahirt wird. Denn in dem Verhältnisse $7-3=4$ ist $7=4+3$ und $3=7-4$. Allgemein ist, in dem Verhältnisse $a-b=d$, die Größe $a=b+d$ und $b=a-d$. In $6-10=-4$ ist ebenfalls $6=-4+10$ und $+10=6-(-4)=6+4$.

Im geometrischen Verhältnisse der Ungleichheit findet man das erste Glied durch ein Product aus dem zweyten in den Exponenten; das zweyte Glied aber, wenn man das erste durch den Exponenten dividirt. In dem Verhältnisse $18:6=3$ ist $18=6\times 3$ und

$6 = 18 : 3$; auch ist in $7 : 10 = \frac{7}{10}$ die $7 = \frac{7}{10} \times 10$ und $10 = 7 : \frac{7}{10} = 7 \times \frac{10}{7} = 10$. Allgemein ist in $a : b = d$, die $a = b \times d$ und $b = a : d$.

§. 3.

Werth des arithmetischen Verhältnisses. Arithmetische Proportion.

Der Werth eines arithmetischen Verhältnisses hängt nicht von der Größe seiner Glieder sondern von deren Differenz ab. Wenn Verhältnisse gleiche Differenzen haben, so nennt man sie gleiche, im entgegengesetzten Falle, ungleiche Verhältnisse. So sind die Verhältnisse 12 — 9 und 10 — 7 gleiche, weil in beyden die Differenz = 3 ist; das Verhältniß 12 — 9 aber ist größer als 10 — 9, weil jenes 3, dieses 1 zur Differenz hat

Hieraus folgt, daß die Größe des arithmetischen Verhältnisses nicht von der Größe

seiner Glieder abhänge, und man erkennt leicht, daß größere Glieder ein kleineres, kleinere Glieder aber ein größeres Verhältniß bilden können.

Die Verbindung zweyer gleichen arithmetischen Verhältnisse heißt eine arithmetische Proportion; z. B. 15 — 9 = 13 — 7, und man sagt: 15 verhält sich zu 9, wie 13 zu 7, oder allgemein: a — b = c — d. Die Glieder a und d heissen die äußern, b und c aber die innern oder mittlern Glieder; auch nennt man a das erste, b das zweyte, c das dritte und d das vierte Glied der Proportion. Andere Beyspiele sind folgende: 3 — 11 = 7 — 15; oder 6 — 14 = 8 — 16; oder 20 — 16 = 12 — 8 u. s. w.

§. 4.
Gleichheit der Summen aus den äussern und innern Gliedern.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äussern Glieder so groß als die

Summe aus den mittlern; z. B. in der Proportion $12 - 8 = 6 - 2$ ist $12 + 2 = 8 + 6 = 14$.

Um diesen Satz allgemein zu beweisen, sey $a - b = m - n$ und die Differenz beyder Verhältnisse $= d$, so ist $a = b + d$ (§. 2) $m = n + d$, folglich wird die Proportion in nachstehende verwandelt: $(b + d) - b = (n + d) - n$, worin die Summe der äußern Glieder $= b + d + n$, jene der innern $b + n + d$ und folglich jener gleich ist. Daher ist z. B. in $7 - 12 = 10 - 15$, die Summe $7 + 15 = 12 + 10$, und in $24 - 18 = 12 - 6$ die Summe $24 + 6 = 18 + 12$.

§ 5.

Einige Folgerungen hieraus.

I. Wenn man zu jedem Gliede eines arithmetischen Verhältnisses die nämliche Zahl addirt, oder von beyden dieselbige Zahl subtrahirt, so bleibt das Verhältniß in seinem Werthe unverändert. Denn da der Werth eines arithmetischen Verhältnisses in der Größe

des Unterschiedes seiner Glieder besteht, der Unterschied zweyer Zahlen aber der nämliche bleibt, wenn man jede von ihnen um Dasselbige vermehrt oder vermindert, so bleibt auch jenes Verhältniß unverändert. Z. B. 12 — 7 = 5; daher auch (12 + 3) — (7 + 3) oder 15 — 10 = 5. Ebenso ist (12 — 2) — (7 — 2) = 10 — 5 = 5. Oder allgemein a — b = d, folglich a + m) — (b + m) = d, oder auch (a — m) — (b — m) = d.

II. Daher kann man jede arithmetische Proportion auf vielfache Art in der Größe ihrer Glieder verändern, ohne daß die Proportionalität gestört wird. Z. B. aus der Proportion 24 — 19 = 17 — 12 entstehen folgende: 30 — 25 = 15 — 10, oder 20 — 15 = 23 — 18, oder 12 — 7 = 18 — 13.

III. Auch verhält sich in jeder arithmetischen Proportion das erste Glied so zum dritten, wie das zweyte sich zum vierten verhält. Denn das erste Glied ist die Summe aus dem zweyten Gliede und dem Unterschiede; so wie das dritte Glied die Summe aus dem vierten und

dem nämlichen Unterschiede ist. Folglich ist das erste und dritte Glied um das Nämliche größer, als das zweyte und vierte, und die neuen Verhältnisse sind daher gleich. Es sey $a - b = m - n$ und die Differenz $=$, so ist $a = b + d$ und $m = n + d$, folglich auch $a - m = b + d - n + d$, d. h. $a - m = b - n$. Es sey $18 - 11 = 15 - 8$, so ist auch $18 - 15 = 11 - 8$. Denn $18 - 15 = (11 + 7) - (8 + 7)$. Daher denn $(11 + 7) - (8 + 7) = 11 - 8$ u. s. w.

IV. Daher bleibt jede arithmetische Proportion ungestört, wenn man das erste und dritte, oder das zweyte und vierte Glied um dieselbige Zahl vermehrt oder vermindert z. B. in $a - b = m - n$ ist $(a + c) - b = (m + c) - n$, oder $(a - c) - b = (m - c) - n$, oder $a - (b + c) = m - (n + c)$, oder $a - (b - c) = m - (n - c)$ u. s. w.

V. Wenn zwey gleiche Summen gegeben sind, deren jede aus zwey Größen besteht, so kann man aus diesen 4 Zahlen mehrere

Proportionen bilden, wovon das eine Paar die innern, das andere die äußern Glieder werden. Es sey $a + b = m + n$, so wird: $a - m = n - b$, $a - n = m - b$, $m - a = b - n$, $m - b = a - n$ u. s. w; oder wenn $8 + 12 = 17 + 3$ ist, so hat man $12 - 3 = 17 - 8$, $12 - 17 = 3 - 8$, $8 - 3 = 17 - 12$, $8 - 17 = 3 - 12$ u. s. w.

VI. Wenn man die gleichnamigen Glieder mehrerer arithmetischen Proportionen zusammen addirt, oder von einander subtrahirt, so bilden die Summen oder Differenzen wiederum eine Proportion. Z. B.

Aus $a - b = m - n$

und $g - h = p - q$, folgt

$(a + g) - (b + h) = (m + p) - (+ q)$ oder auch $(a - g) - (b - h) = (m - p) + (n - q)$. Denn es ist leicht einzusehen, daß die beyden Verhältnisse der neuen Proportion gleiche Differenzen haben müssen. In Zahlen sey $6 - 9 = 7 - 10$ und

$5 - 3 = 8 - 6$, so ist

$11 - 12 = 15 - 16$, und $1 - 6 = - 1 - 4$ u. s. w.

§. 6.

Begriff und Bestimmung der vierten arithmetischen Proportionalzahl.

I. Zu drey gegebenen Größen eine vierte arithmetische Proportional-Größe zu finden heißt, diese drey Größen als Glieder einer arithmetischen Proportion ansehen und hieraus die Größe des vierten Gliedes, dessen Stelle in der Proportion gegeben seyn muß, bestimmen.

II. Wenn das zu findende Glied ein äußeres ist, so subtrahire man von der Summe der mittlern Glieder das gegebene äußere, so findet man das vierte; fehlt aber eines der innern Glieder, so ziehe man von der Summe der äußern das gegebene mittlere Glied ab.

Der Beweis dieser Regel beruht darauf, daß die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich ist, und daß, wenn man von einer zweytheiligen Summe den

einen Theil abzieht, der andere übrig bleibt. Es sey

1) $a - b = m - x$, so ist $x = b + m - 4$,
2) $a - b = x - n$, so ist $x = a + n - b$,
3) $a - x = m - n$, so ist $x = a + n - m$,
4) $x - b = m - n$, so ist $x = b + m - n$
oder:
5) $12 - 7 = 15 - x$, so ist $x = 7 + 15 - 12 = 10$,
6) $12 - 7 = x - 10$, so ist $x = 12 + 10 - 7 = 15$,
7) $12 - x = 15 - 10$, so ist $x = 12 + 10 - 15 = 7$,
8) $x - 7 = 15 - 10$, so ist $x = 7 + 15 - 10 = 12$.

§. 7.

Begriff und Bestimmung der mittlern arithmetischen Proportionalzahl.

I. Wenn in einer arithmetischen Proportion das zweyte Glied zugleich die Stelle des dritten vertritt, so nennt man die Pro-

portion eine stetige und die Zahl der mittlern Glieder die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen dem ersten und vierten Gliede. Z. B. $a - b = b - c$ oder $12 - 8 = 8 - 4$. Im ersten Beyspiele ist b zwischen a und b, im zweyten 8 zwischen 12 und 4 die mittlere arithmetische Proportionalzahl.

II. Soll man zu zwey gegebenen Zahlen eine mittlere arithmetische Proportionalzahl finden, so addire man dieselbe und halbire ihre Summe, so ist diese Hälfte die zu findende Zahl. Denn um zwischen a und b die unbekannte Proportionalzahl x zu finden, denke man sich die Proportion $a - x = x - b$, worin $a + b = 2x$; folglich $x = \frac{a + b}{2}$ ist. In Zahlen sey $20 - x = x - 8$, so wird $x = \frac{20 + 8}{2} = 14$ und es ist $20 - 14 = 14 - 8$. Oder $17 - x = x - 12$, so wird $x = \frac{17 + 12}{2} = \frac{29}{2} =$

$14\frac{1}{2}$, und man hat $17 - 14\frac{1}{2} = 14\frac{1}{2} - 12$.

§. 8.

Werth des geometrischen Verhältnisses; geometrische Proportion.

Das geometrische Verhältniß zeigt an, wie vielmal das erste Glied größer als das zweyte ist durch den Exponenten. Wenn nun bey zwey Verhältnissen dieser Exponent gleich ist, so sind auch diese Verhältnisse gleich. So ist z. B. $32 : 4 = 8$ und $48 : 6 = 8$, daher ist das Verhältniß von $32 : 4$ dem Verhältnisse von $48 : 6$ gleich. Da das Verhältniß $30 : 5$ den Exponenten 6, das Verhältniß $24 : 8$ den Exponenten 3 hat, so ist jenes größer als dieses, dieses aber kleiner als jenes. Die Verbindung zweyer gleichen geometrischen Verhältnisse nennt man eine geometrische Proportion. Ihr allgemeiner Ausdruck ist $a : b = c : d$, und es ist klar,

daß a soviel mal größer oder kleiner als b sey, so vielmal größer oder kleiner c in Bezug auf d ist. In Zahlen ist z. B. 12 : 4 = 18 : 6 oder 5 : 30 = 7 : 42. u. s. w.

Es ist klar, daß in der geometrischen Proportion 4 Glieder sind, welche man das erste, zweyte, dritte und vierte nennt.

§. 9.

Gleichheit der Producte aus den äußern und innern Gliedern.

In jeder geometrischen Proportion ist das Product aus den beyden äußern Gliedern dem Producte aus den beyden innern gleich. Die Proportion sey a : b = c : d und der gemeinsame Exponent heiße n, so ist (nach §. 2) a = b X n und c = d X n; folglich verwandelt sich die Proportion in diese: b X n: b = d X n: d. Bildet man hier die Producte aus den äußern und innern Gliedern, so muß b X n X d = b X d X n seyn, weil diese Producte aus den nämlichen Factoren bestehen. In Zahlen wird aus 12 : 4 = 18 : 6 das Product 12 X 6 = 4 X 18 = 72;

oder in $5 : 30 = 7 : 42$ wird $5 \times 42 = 30 \times 7 = 210$ u. s. w.

§. 10.

Folgerungen hieraus.

I. Wenn man die beyden Glieder eines geometrischen Verhältnisses mit der nämlichen dritten Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt der Werth des Verhältnisses unverändert. Das Verhältniß sey $a : b$ und m eine beliebige Zahl, so ist $a : b = a \times m : b \times m$ und $a : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$. Denn das Verhältniß $a : b$ ist seiner Natur nach ein Quotient, somit auch ein Bruch von der Form $\frac{a}{b}$. Wenn man aber den Zähler und Nenner eines Bruchs mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt der Werth dieses Bruchs, und folglich auch des durch ihn ausgedrückten Verhältnisses unverändert. In Zahlen ist z. B. $24 : 8 = 24 \times 3 : 8 \times 3 = 72 : 24$, oder $24 : 8 = \frac{24}{8} : \frac{8}{8} = 3 : 1$ u. s. w.

II. Da das Verhältniß unverändert bleibt, wenn dessen Glieder mit der nämlichen Zahl dividirt werden, so hat man dieses zu dem sogenannten Heben der Verhältnisse benützt, welches mit dem Heben der Brüche vollkommen einerley ist und den Vortheil gewährt, daß man mit kleinern Zahlen bequemer rechnen kann. Die oben (im V. Buche) angegebenen Regeln für das Heben der Brüche gelten daher auch für das Heben der Verhältnisse.

III. In jeder geometrischen Proportion verhält sich auch das erste Glied so zum dritten, wie sich das zweyte zum vierten verhält. Es sey $a : b = c : d$ und der Exponent $= n$, so ist $a = b \times n$ und $c = d \times n$; folglich die Proportion $b \times n : b = d \times n : d$, woraus man (nach I) sogleich einsieht, daß $b \times n : d \times n = b : d$, d. h. $a : c = b : d$ sey. In Zahlen wird aus $48 : 6 = 16 : 2$, auch $48 : 16 = 6 : 2$, u. s. w.

IV. Wenn man daher das erste und dritte, oder das zweyte und vierte Glied einer geometrischen Proportion mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt die Propor-

tionalität ungestört. Es sey $a : b = c : d$, so ist z. B. $a \times n : b = c \times n : d$, oder $a : b \times n = c : d \times n$, oder $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$, oder $a : \frac{c}{n} = c : \frac{d}{n}$ u. s. w.

Man kann daher die Glieder einer Proportion auch dadurch heben, daß man das erste und dritte, oder ihr zweytes und viertes Glied mit der nämlichen Zahl dividirt. Hiernach nennt man das erste und zweyte, das erste und dritte, das zweyte und vierte, das dritte und vierte Glied verhältnißmäsige, aber das erste und das vierte, das zweyte und dritte die unverhältnißmäsigen Glieder der geometrischen Proportion.

V. Wenn ein Proportionsglied ein Bruch ist, so kann man dasselbe dadurch in eine ganze Zahl verwandeln, daß man ihm seinen Nenner raubt, aber irgend ein anderes verhältnißmäsiges Glied damit multiplicirt. Z. B. aus $a : \frac{b}{m} = c : d$ wird entweder $a \times m : b = c : d$, oder $a : b = c : d \times m$. Oder

aus $6 : \frac{3}{4} = 32 : 4$, entweder $24 : 3 = 32 : 4$, oder $6 : 3 = 32 : 16$ u. s. w. Sind mehrere Proportionsglieder Brüche, so bringe man dieses Verfahren mehrmals an. Z. B. aus $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{m}{n} : g$ wird $\frac{a \times d}{b} : c = \frac{m}{n} : g$, oder $a \times d : b \times c = \frac{m}{n} : g$, oder $a \times d : b \times c = m : g \times n$. Hätten hierbey zwey verhältnißmäsige Bruchglieder einerley Nenner, so könnte man dieselbe gerade zu weglassen z. B. aus $\frac{a}{b} : c = \frac{m}{b} : d$ wird sogleich $a : c = m : d$.

VI. Wenn man in zwey geometrischen Proportionen die ersten, zweyten, dritten und vierten Glieder mit einander multiplicirt, so bilden die hieraus entstehenden 4 Producte, in der nämlichen Ordnung, wiederum eine Proportion. Es sey

$a : b = c : d$ und

$m : n = p : q$ so ist auch

$$a \times m : b \times n = c \times p : d \times q.$$

Denn aus der ersten Proportion ist $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ aus der zweyten $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Werden daher diese gleiche Brüche mit einander multiplicirt, so ist $\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \times \frac{p}{q}$ oder $\frac{a \times m}{b \times n} = \frac{c \times p}{d \times q}$, woraus die Proportion $a \times m : b \times n = c \times p : d \times q$ folgt. In Zahlen sey

$$6 : 2 = 12 : 4 \text{ und}$$
$$3 : 15 = 5 : 25 \text{ so ist}$$

$$18 : 30 = 60 : 100.$$

Man nennt die durch Multiplication der gleichnamigen Glieder entstandene neue Proportion eine zusammengesetzte, und es ist klar, daß auch aus 3, 4 und mehreren Proportionen eine neue zusammengesetzt werden könne. Auch wird man leicht finden, daß der Exponent in der zusammengesetzten Proportion dem Producte aus den Exponenten der gegebenen Proportionen gleich sey.

VII. Wenn zwey Producte einander gleich sind, deren jedes aus 2 Factoren besteht, so kann man aus ihnen mehrere Proportionen bilden, in welchen die Factoren des einen Products die innern, jene des andern aber die äußern Glieder sind. Aus a X b = m X n folgt

a : m = n : b, a : n = m : b
b : m = n : a, b : n = m : a, oder
aus 4 X 9 = 12 X 3 folgt
4 : 12 = 3 : 9, 4 : 3 = 12 : 9
9 : 12 = 3 : 4, 9 : 3 = 12 : 4.

VIII. Als Ergänzung von VI. bemerke man noch, daß die gleichnamigen Glieder zweyer gegebenen Proportionen auch mit einander dividirt werden können, um in den entstehenden Quotienten wiederum eine Proportion zu erhalten. Z. B. aus

a : b = c : d, und aus
m : n = p : q wird auch

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}.$$

§. 11.

Begriff und Bestimmung der vierten geometrischen Proportionalzahl.

I. Unter der vierten geometrischen Proportionalzahl versteht man eine Zahl, welche mit 3 gegebenen Zahlen eine geometrische Proportion dergestalt bildet, daß sie als ein bestimmtes Glied derselben erscheinet.

II. Wenn die zu findende Proportionalzahl ein äußeres Glied ist, so dividire man mit dem gegebenen äußern in das Product aus den mittlern Gliedern; der Quotient ist die zu findende Zahl. Fehlt aber in der Proportion ein mittleres Glied, so multiplicire man die beyden äußern und dividire das Product mit dem vorhandenen innern Gliede. Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht darauf, daß die Producte aus den äußern und innern Gliedern gleich sind, und daß, wenn man mit dem einen Factor in das Product zweyer Zahlen dividirt, der andere Factor zum Vorschein kömmt. Es sey

1) $a : b = m : \mathfrak{X}$, so ist $\mathfrak{X} = b \times m : a$
2) $a : b = \mathfrak{X} : n$, so ist $\mathfrak{X} = a \times n : b$
3) $a : \mathfrak{X} = m : n$, so ist $\mathfrak{X} = a \times n : m$
4) $\mathfrak{X} : b = m : n$, so ist $\mathfrak{X} = b \times m : a$
oder
5) $48 : 8 = 18 : \mathfrak{X}$, so ist $\mathfrak{X} = 8 \times 18 : 48 = 3$,
6) $48 : 8 = \mathfrak{X} : 3$, so ist $\mathfrak{X} = 48 \times 3 : 8 = 18$,
7) $48 : \mathfrak{X} = 18 : 3$, so ist $\mathfrak{X} = 48 \times 3 : 18 = 8$,
8) $\mathfrak{X} : 8 = 18 : 3$, so ist $\mathfrak{X} = 8 \times 18 : 3 = 48$.

§. 12.

Begriff und Bestimmung der mittlern geometrischen Proportionalzahl.

I. Eine stetige geometrische Proportion heißt jene, worin das zweyte und dritte Glied einerley Zahlen sind, und jede dieser Zahlen wird die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen den beyden äußern Gliedern genannt. So ist $a : b = b$

: c, oder 8 : 4 = 4 : 2 eine stetige geometrische Proportion, und b ist zwischen a und c, so wie 4 zwischen 8 und 2 die mittlere geometrische Proportionalzahl.

II. Um zu zwey gegebenen Zahlen eine mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden, seyen jene Zahlen 12 und 3, die zu findende aber X, so müßte 12 : X = X : 3 seyn. Hieraus folgte, daß 12 X 3 oder 36 = X X X oder = X^2 wäre. Um hieraus den Werth von X selbst zu finden, kömmt es darauf an, die Zahl 36 in 2 gleiche Factoren zu zerlegen, deren Product 36 bildet. Daß dieser Factor 6 sey, lehrt hier schon das Einmaleins, weil 6 X 6 oder $6^2 = 36$ ist. Wie man aber in andern Fällen diese gleiche Factoren finden könne, wird das folgende Buch von der Ausziehung der Quadratwurzeln lehren.

§ 13.

Fernere Eigenschaften der geometrischen Proportion

I. In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe oder die Differenz aus

dem ersten und zweyten Gliede zu dem ersten oder zweyten Gliede, wie die Summe oder Differenz aus dem dritten und vierten Gliede sich zum dritten oder vierten Gliede verhält. Die Proportion sey $a : b = m : n$ und d der Exponent, so ist auch $b \times d : b = n \times d : n$ und $b \times d : n \times d = b : n$, oder $d \times b : d \times n = b : n$, daher auch $(d + 1) \times b : d + 1 \times n = b : n$, oder $d \times b + b : d \times n + n = b : n$ d. h. $a + b : m + n = b : n$, oder $a + b : b = m + n : n$. In Zahlen sey $12 : 3 = 24 : 6$, so ist $3 \times 4 : 3 = 6 \times 4 : 6$ und $3 \times 4 : 6 \times 4 = 3 : 6$, oder $4 \times 3 : 4 \times 6 = 3 : 6$, daher auch $5 \times 3 : 5 \times 6 = 3 : 6$, oder $12 + 3 : 24 + 6 = 3 : 6$ d. h. $12 + 3 : 3 = 24 + 6 : 6$ d. h. die Summe vom ersten und zweyten Gliede verhält sich zum zweyten, wie die Summe vom dritten und vierten Gliede sich zum vierten verhält. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß $a - b : b = m - n : n$, oder $12 - 3 : 3 = 24 - 6 : 6$ sey.

II. Auch kann man auf ähnliche Art beweisen, daß sich in jeder geometrischen Pro-

portion die Summe oder Differenz aus dem ersten und dritten Gliede sich so zum ersten oder dritten verhält, wie sich die Summe oder Differenz aus dem zweyten und vierten Gliede zu dem zweyten oder vierten verhält. Z. B. aus $a : b = m : n$ folgt $a + m : a = b + n : b$, oder $a - m : a = b - n : b$, oder $a + m : b = b + n : n$, oder $a - m : b = b - n : n$. Denn aus $a : b = m : n$ folgt sogleich $a : m = b : n$, und nun beruht der Beweis auf I.

III. Wenn in einer geometrischen Proportion die 3 ersten Glieder, wozu das vierte gesucht werden soll, angegeben; und nebst dem noch mehrere Verhältnisse vorhanden sind; so, daß jenes gefundene vierte Glied im ersten der gegebenen Verhältnisse das dritte wird, wozu man ein neues vierte sucht, welches in dem folgenden Verhältnisse wieder ein drittes Glied zu einem zu findenden vierten ist, u. s. w. dasjenige Glied zu finden, welches in der letzten Proportion das vierte ist.

Nachdem alle gegebene Verhältnisse unter das erste Verhältniß der Proportion gesetzt

sind, mache man ein Product aus allen ersten und aus allen zweyten Gliedern, multiplicire dieses mit dem dritten Gliede der Proportion und dividire das Product durch das Factum aller ersten Glieder, so ist der Quotient das zu findende letzte. Folgendes Beyspiel wird die Richtigkeit der Auflösung erläutern.

Die gegebene Proportion sey $a : b = c : x$, und die gegebenen Verhältnisse seyen $m : n = - : -$ und $p : q = - : -$, so ist zuerst $x = \frac{b \times c}{a}$. Dieses, als drittes Glied in die zweyte Proportion gesetzt, gibt $m : n = \frac{b \times c}{a} : y$, woraus $y = \frac{n \times b \times c}{m \times a}$ wird. Diesen Bruch als drittes Glied in die folgende Proportion gebracht, gibt $p : q = \frac{n \times b \times c}{m \times a} : z$, woraus $z = \frac{q \times n \times b \times c}{p \times m \times a}$ wird, welches der Werth des zu findenden Gliedes nach obiger Vorschrift ist.

Auch läßt sich dieser Satz folgendergestalt erläutern. Es sey nämlich:

$$5 : 12 = 7 : x$$
$$8 : 15 = x : y \text{ und}$$
$$9 : 4 = y : z, \text{ so ist}$$

$5 \times 8 \times 9 : 12 \times 15 \times 4 = 7 \times x \times y : x \times y \times z$, d. h. $5 \times 8 \times 9 : 12 \times 15 \times 4 = 7 : z$, woraus $z = \frac{12 \times 15 \times 4 \times 7}{5 \times 8 \times 9}$ wird, welches mit dem Obigen übereinstimmt.

Die bisher vorgetragenen Lehren von den Verhältnissen und Proportionen enthalten den Grund zu den höchst mannichfaltigen Anwendungen derselben auf practische Rechnungen des gemeinen Lebens, wovon nun die wichtigsten vorgetragen werden sollen.

§. 14.

Begriff der einfachen Regel-Detri.

Wenn man auf die Gegenstände Rücksicht nimmt, welche in den Rechnungen des gemeinen Lebens vorkommen, so bemerkt man, daß zwischen denselben ein geometrisches Verhält-

niß Statt hat. Man findet, daß bey Vergrößerung oder Verringerung des einen, der andere ebenfalls sovielmal vergrößert oder verringert werde, oder auch umgekehrt. Wer z. B. eine gewisse Menge von Waaren für einen bestimmten Preis eingekauft hat, wird, wenn er sechsmal so viele Waare von der nämlichen Gattung kaufen will, auch einen sechsfach höhern Werth erlegen müssen. Im Gegentheile wird man für den vierten Theil der nämlichen Waare auch nur den vierten Theil des Preises entrichten. Man sagt daher: Die Waare verhält sich sowie der Preis, und auch der Preis sowie die Waare. Insbesondere heißt dieses Verhältniß hier ein gerades, weil, bey dem Größerwerden des einen zu vergleichenden Gegenstandes, auch der andere eben so vielmal größer, und, bey dem Kleinerwerden des einen, auch der andere eben so vielmal kleiner wird. Wer hingegen eine gewisse Arbeit von einer bestimmten Anzahl Menschen in einer festgesetzten Zeit vollendet, wird für eben dieses Werk mehr Arbeiter nöthig haben, wenn er es in einer kürzern Zeit, und

weniger, wenn er es in einer längern Zeit beendigen will. In diesem Falle nun wird die eine Größe so vielmal vergrößert, so vielmal die andere verringert, und die eine so vielmal verringert, als die andere vergrößert wird. Ein solches Verhalten zweyer Dinge wird ein verkehrtes oder umgekehrtes Verhältniß genennt, und man sagt in obigem Beyspiele: daß die Menge der Arbeiter sich verkehrt wie die Zeit verhalte.

Die einfache Regel Detri, oder die Regel von drey Sätzen, ist die Art und Weise, wie man aus drey gegebenen Dingen (Sätzen) deren zwey unter sich gleichartig sind, ein viertes, welches mit dem angegebenen dritten von einerley Art ist, durch Rechnung finden soll, welches in eben dem Verhältnisse zu dem dritten, wie das zweyte zu dem ersten steht. Z. B. Man fragt: wenn 6 ℔ einer gewissen Materie 15 fl. kosten, was werden 20 ℔ von eben dieser Materie werth seyn? — Hier sucht man den Preis von 20 ℔ d. h. etwas, was mit den gegebenen 15 Gulden von einerley Art ist. Auch wird die

zu findende Menge von Gulden, weil unter den angegebenen Dingen ein gerades Verhältniß Statt hat, so vielmal größer, als die gegebene von 15 fl., so vielmal die 20 ℔ größer, als die 6 ℔ sind. Hieraus folgt, daß die Regel Detri nichts anders, als die geometrische Proportion sey, wo man aus drey gegebenen ersten Gliedern die vierte geometrische Proportionalzahl, als das zu findende vierte Glied suchet.

§. 15.

Auflösung der einfachen Regel Detri.

Um die Sätze, welche bey der einfachen Regel Detri vorkommen, zu ordnen und das fehlende vierte Glied zu bestimmen, suche man

I. von den drey gegebenen Sätzen denjenigen, welcher mit dem zu findenden einerley Namen hat und setze denselben **als drittes Glied** in die Proportion.

II. Man untersuche, ob das zu findende vierte Glied größer oder kleiner, als das dritte, werden wird, welches aus der Natur der Sache leicht zu bestimmen ist.

III. Im ersten Falle von II. ist das zweyte Verhältniß der zu bildenden Proportion vom Kleinern zum Größern; im zweyten hingegen vom Größern zum Kleinern. Man ordne demnach das erste Verhältniß, dessen beyde Glieder gegeben sind, nach der nämlichen Ungleichheit, so entsteht hieraus eine Proportion, worin das fehlende vierte Glied aus den bekannten drey ersten leicht berechnet werden kann.

Erläuterung.

Wenn 7 Ellen von einem gewissen Tuche 12 Gulden kosten, was wird man für 19 Ellen von eben diesem Tuche geben müssen?

Nach I. wird, weil hier Gulden gesucht werden, die gegebene Menge von 12 Gulden das dritte Glied, und die Proportion wäre bis jetzt diese — : — = 12 : X. Nach diesem

erhellet sogleich, daß die zu findende Gulden-zahl größer als die gegebene seyn werde, weil 19 Ellen mehr als 7 Ellen sind, und hier ein gerades Verhältniß Statt hat. Es ist folglich (nach II.) hier ein Verhältniß vom Kleinern zum Größern und das erste Verhältniß der zusetzenden Proportion muß von der nämlichen Ungleichheit seyn. Daher entsteht folgende Proportion 7 : 19 = 12 : X,

wo denn $X = \frac{19 \times 12}{7} = \frac{228}{7} = 32\frac{4}{7}$ Gulden wird.

Die Auflösung beruht unmittelbar auf §. 11 und §. 14.

Wenn die drey gegebenen Sätze in die Proportion geordnet sind, so versuche man, ehe die Auflösung unternommen wird, ob §. 5 seine Anwendung findet, oder nicht; weil nämlich, im Falle sich die verhältnißmäßigen Glieder durch eine Zahl heben lassen, dieses die Rechnung sehr erleichtert. Besonders muß man, in den Fällen, wo Brüche vorkommen, sich der Weisung in § 10, V, be-

dienen, um die Nenner derselben hinwegzubringen.

§. 16.

Beyspiele zur Uebung.

I. Wenn 18 Arbeiter ein gewisses Werk binnen 40 Tagen verfertigen; in welcher Zeit werden 32 Personen das nämliche Werk vollenden?

Hier soll eine Menge von Tagen gesucht werden. Sie heiße X, so ist — : — = 40 : X. Weil nun die 32 Arbeiter das zu verfertigende Werk eher, als die 18, beendigen werden, so ist 32 : 18 = 40 : X, oder, indem man das erste und dritte Glied durch 8 dividirt, 4 : 18 = 5 : X; oder, wenn man das erste Verhältniß mit 2 hebt, 2 : 9 = 5 : X, woraus denn $X = \frac{9 \times 5}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$ Tag wird.

II. Wenn $7\frac{3}{4}$ Pfunde einer gewissen Ma-

terie $12\frac{1}{2}$ Gulden kosten; was wird man für $18\frac{2}{3}$ Pfund von eben dieser Materie geben müssen?

Es bedeute wieder X die zu suchenden Gulden, so ist die anzusetzende Proportion diese: $7\frac{3}{4} : 18\frac{2}{3} = 12\frac{1}{2} : X$; oder, indem man die Brüche einrichtet, $\frac{31}{4} : \frac{56}{3} = \frac{25}{2} : X$; ferner $31 : \frac{56}{3} = \frac{25 \times 4}{2} : X$, oder $93 : 56 = 50 : X$, woraus $X = \frac{56 \times 50}{93} = \frac{2800}{93} = 30\frac{10}{93}$ Guld. $= 30$ Guld. und $\frac{10 \times 60}{93}$ Kr. $= \frac{600}{93} = 6\frac{42}{93}$ Kr. $= 6$ Kr. $\frac{42 \times 4}{93}$ Pf. $= \frac{168}{93}$ Pf. $= 1\frac{75}{93}$ Pf. $= 1\frac{25}{31}$ Pf. Folglich ist $X = 30$ Gulden, 6 Kr. und $1\frac{25}{31}$ Pfennig.

III. Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 23850 Guld. in einem Jahre ertragen, wenn man von 100 Gulden 4 1/2 Gulden Interessen bekömmt? —

Man sucht die Zinsen = X, und die Proportion ist diese

$$100 : 23850 = 4\frac{1}{2} : X, \text{ oder}$$

$$10 : 2385 = \frac{9}{2} : X, \text{ oder}$$

$$20 : 2385 = 9 : X, \text{ wo denn}$$

$$X = \frac{2385 \times 9}{20} = \frac{21465}{20} = 1073\frac{1}{4} \text{ Gulden}$$

ist; d. h. das gegebene Kapital wird 1073 Gulden 15 Kr. Zinsen bringen.

Wären die gegebenen Sätze benannte Zahlen von verschiedenen Wertharten; so müßten dieselben, wenn sie in eine Proportion geordnet sind, zuerst auf Einheiten der niedrigsten Werthart reducirt werden. Nach diesem geschieht die fernere Auflösung wie oben. Z. B. 8 Centner, 75 Pfunde, 12 Lothe, 3 Quentchen kosten 148 Gulden, 24 Kreutzer;

wie viel wird man für 337 Gulden, 36 Kreuzer bekommen? — Hier ist die Proportion diese: 148 Gulden 24 Kr.: 337 Gulden 36 Kr. = 8 Centner 75 Pf. 12 Lothe 3 Quent. : X. Reducirt man im ersten und zweyten Gliede alles auf Kreutzer, und im dritten auf Quentchen, so entsteht hieraus Folgendes:

8905 Kr.: 20256 Kr. = 112051 Quent.: X, oder 1113 : 2532 = 112051 : X; folglich X = $\frac{2532 \times 112051}{1113} = \frac{283713132}{1113}$ Quentchen = 19 Centner, 19 Pfunde 13 Lothe und $\frac{528}{1113}$ Quentchen.

Nach diesem Muster werden alle ähnliche Aufgaben behandelt.

§. 17.

Begriff der Gewinn- und Verlust-Rechnung.

Eine Rechnung, welche nichts anders, als eine Anwendung der einfachen Regel Detri ist, und bey den Geschäften des gemeinen

Lebens häufig vorkommt, ist die sogenannte Gewinn- und Verlustrechnung. Sie begreift alle Fälle unter sich, wo bey Kauf und Verkauf der sich ergebende Verlust oder Gewinn nach 100 bestimmt wird. Dasjenige, was an jedem 100 einer gewissen Summe gewonnen oder verlohren wird, heißt Procentgewinn oder Procentverlust. Wer z. B. eine Parthie Waaren für 300 verkauft und für 285 Gulden eingekauft hat, hat 5 für's 100 gewonnen, und sein Procentgewinn ist daher 5 Gulden. Hätte er diese Waaren für 288 Gulden verkauft, so würde sein Procentverlust 4 Gulden gewesen seyn; denn er hätte 4 Gulden am 100 verlohren.

Die Fälle, welche nach dieser Erklärung vorkommen können, reduciren sich auf folgende:

I. Aus dem gegebenen Preise des Einkaufs den Werth des Verkaufs zu bestimmen, wenn zugleich der Procentgewinn gegeben ist.

II. Aus dem bekannten Verkaufe nebst dem Procentgewinn oder Procentverlust die Größe des Einkaufs zu berechnen.

§. 18.

Aus dem Einkaufe nebst Procentgewinn die Verkaufssumme zu finden.

Um die Größe des Verkaufs zu bestimmen, wenn der Einkauf nebst Procentgewinn gegeben ist, addire man den gegebenen Procentgewinn zu 100, so ist 100 als bloser Einkauf und jene Summe als Verkauf mit Procentgewinn anzusehen. Nebst diesen beyden Dingen ist nun noch der Einkauf bekannt. Man ordne daher dieselbe, als drey Glieder einer Proportion, nach der Regel: Der Einkauf verhält sich zu dem Einkaufe, wie der Verkauf mit Procentgewinn zu dem zu findenden Verkaufe nebst Procentgewinn, und bestimme nun die Größe des fehlenden vierten Gliedes.

Weil aus der Natur der Sache folgt, daß der Einkauf und Verkauf mit Procentgewinn in einem geometrischen Verhältnisse stehen, so hat auch hier die geometrische Proportion und die obige Auflösung Statt.

Beyspiele.

I. Ein Kaufmann hat eine Parthie Waaren für 1350 Gulden eingekauft. Wie theuer muß er dieselbe verkaufen, um an jedem 100 Gulden 6 Gulden zu gewinnen?

Hier sind 100 Gulden als bloser Einkauf und 106 Gulden als Verkauf mit Procentgewinn anzusehen. Folglich ist die Proportion diese:

$$100 : 1350 = 106 : x \text{ oder}$$
$$10 : 135 = 106 : x \text{ oder}$$
$$5 : 135 = 53 : x \text{ oder}$$
$$1 : 27 = 53 : x \text{ folglich}$$
$$x = 27 \times 53 = 1431 \text{ Gulden.}$$

II. Wie theuer muß ein Wirth das Stück Wein, welches er für 540 Gulden eingekauft hat, wieder verkaufen, um 15 Gulden am 100 zu gewinnen?

Hier ist die Proportion diese:

$$100 : 540 = 115 : x, \text{ oder}$$
$$10 : 54 = 115 : x, \text{ oder}$$
$$5 : 27 = 115 : x, \text{ oder}$$
$$1 : 27 = 23 : x, \text{ folglich}$$
$$x = 27 \times 23 = 621 \text{ Gulden.}$$

Man bemerke noch I., daß nach dieser Auflösung auch der Procentverlust gefunden werden kann. Z. B. ein Kaufmann kauft eine gewisse Menge Waaren für 1350 Gulden und verkauft sie mit 4 Procentverlust. Was hat er aus dem Verkauf erlöset?

Die Regel zur Auflösung ist hier diese: der blose Einkauf verhält sich zu dem blosen Einkaufe, wie der Verkauf mit Procentverlust zu dem Verkaufe mit Procentverlust. Da nun hier 4 am 100 sind verlohren worden, so ist 100 — 4 = 96 der Verkauf mit Procentverlust am 100, und folglich die Proportion diese:

$$100 : 1350 = 96 : X, \text{ oder}$$
$$10 : 135 = 96 : X, \text{ oder}$$
$$5 : 135 = 48 : X, \text{ oder}$$
$$1 : 27 = 48 : X, \text{ daher}$$

$X = 27 \times 48 = 1296$ Gulden, und dies war der Preis des Verkaufs. Weil nun der Einkauf 1350 Gulden betrug, so hatte er überhaupt einen Verlust von 1350 — 1296 = 54 Gulden.

II. Hat oft der Fall Statt, daß in diesen Aufgaben gefunden werden soll, wie theuer ein kleinerer Theil als jener, worin der Einkauf geschah, wieder verkauft werden soll, um einen bestimmten Procentgewinn zu erhalten. Z. B. Ein Wirth kaufte ein Stück Wein für 350 Gulden, und verlangt zu wissen, wie hoch er die Maas davon wieder verkaufen müsse, um 6 Gulden am 100 zu gewinnen?

Hier sucht man zuerst, wie hoch das ganze Stück zu verkaufen ist, um den bestimmten Procentgewinn zu erhalten. Man bekömmt folgende Proportion $100 : 350 = 106 : x$, woraus $x = 371$ Gulden. Weil nun ein Stück Wein 600 Maase enthält, so wird $\frac{371}{600}$ Gulden den Preis einer Maas bestimmen. Allein $\frac{371}{600}$ Guld. $= \frac{371 \times 60}{600}$ Kr. $= \frac{371}{10}$ $= 37\frac{1}{10}$ Kr. Daher muß die Maas um $37\frac{1}{10}$ Kr. verkauft werden, um den verlangten Gewinn zu erhalten.

Ferner: Man hat für 68 Pfund einer gewissen Waare 136 Gulden gegeben; wie hoch muß ein Loth verkauft werden, um 12 Procentgewinn zu erhalten? Hier ist wieder der Ansatz dieser: $100 : 136 = 112 : X$, wo $X = \frac{3808}{25}$ Gulden wird. Da nun 32 Lothe auf ein Pfund gehen, so betragen die 68 Pfunde so viel als $68 \times 32 = 2176$ Lothe, und der gefundene Werth muß noch durch $2176 \times 25 = 54400$ dividirt werden. Dieses gibt $\frac{3808}{54400}$ Guld. $= \frac{3808 \times 60}{54400}$ Kr. $= \frac{228480}{54400} = \frac{22848}{5440} = 4\frac{1088}{5440}$ Kr. $= 4$ Kr. und noch $\frac{1}{5}$ Pfennig.

§. 19.

Bestimmung des Einkaufs aus dem Verkaufe nebst Procentgewinn.

Um die Größe des Einkaufs zu bestimmen, wenn der Verkauf nebst Procentgewinn ange-

geben ist, addire man den gegebenen Procentgewinn zu 100, so ist diese Summe als Verkauf mit Procentgewinn und die 100 allein als bloser Einkauf anzusehen. Nebst diesen ist der angegebene Verkauf mit Procentgewinn bekannt. Daher sind drey Sätze vorhanden, wozu der vierte gefunden werden soll. Man ordne nun diese Sätze nach der Regel: Der Verkauf mit Procentgewinn verhält sich zu dem Verkaufe mit Procentgewinn, wie der blose Einkauf zu dem blosen Einkaufe, und löse nun diese Proportion auf.

Da aus der Natur der Sache folgt, daß zwischen den in der Auflösung erwähnten Sätzen geometrische Verhältnisse Statt haben, so leuchtet die Richtigkeit derselben von selbst ein.

Beyspiele.

I. Ein Kaufmann setzte eine gewisse Menge Waaren für 1480 Gulden ab, und weiß, daß er 25 am 100 gewonnen hat? Wie groß war der Einkauf?

Hier ist 125 der Verkauf mit Procentgewinn, so wie auch die erlöste Summe von 1480 Gulden es ist. Der blose Einkauf hingegen ist 100. Folglich wird die Proportion diese:

$$125 : 1480 = 100 : x \text{ oder}$$
$$5 : 1480 = 4 : x \text{ oder}$$
$$1 : 296 = 4 : x$$ woraus $x = 296 \times 4 = 1184$ Gulden wird, welches der blose Einkauf ist.

II. Wie hoch war der Einkauf eines Stück Weins, wenn dasselbe mit 30 Guld. Procentgewinn für 1345 Guld. verkauft worden ist?

Die Anordnung der Sätze in die Proportion gibt Folgendes:

$$130 : 1345 = 100 : x, \text{ oder}$$
$$13 : 1345 = 10 : x, \text{ folglich}$$
$$x = \frac{1345 \times 10}{13} = \frac{13450}{13} = 1034\,\frac{8}{13}$$
Gulden.

Noch bemerke man:

I. Wäre in dieser Aufgabe, anstatt des Verkaufs mit Procentgewinn, der Verkauf nebst Procentverlust gegeben, so ist einleuchtend, daß auch hieraus die Größe des Einkaufes gefunden werden kann. Z. B. Ein Kaufmann verkauft eine Parthie Waaren für 2509 Gulden mit einem Procentverlust von 4 Gulden. Wie hoch war der Einkauf?

Die Regel zur Auflösung ist diese: Verkauf mit Procentverlust verhält sich zum Verkaufe mit Procentverlust, wie bloser Einkauf zum blosen Einkaufe. Wer nun 4 Procentverlust erleidet, bekömmt für 100 nur 100 — 4 oder 96 Gulden. Daher ist Folgendes der Ansatz.

$96 : 2500 = 100 : x$ oder
$24 : 625 = 100 : x$ oder $6 : 625 = 25 : x$, woraus $x = \frac{625 \times 25}{6} = \frac{15625}{6} = 2604 \frac{1}{6}$ Gulden, d. h. 2604 Guld. 10 Kr. wird.

II. Desgleichen ist klar, daß diese Aufgabe auch so heissen könne: Man verkauft das

Loth einer gewissen Materie für 12 Kr. mit 3 Procentverlust. Wie hoch hat man 86 ℔ von eben dieser Materie eingekauft? — Der Ansatz ist dieser:

97 : 12 = 100 : X, wo $X = \frac{1200}{97}$. Nun ist aber 86 Pf. = 86 X 32 = 2752 Lothe. Folglich $\frac{1200 \times 2752}{97} = 34045 \frac{35}{97}$ Kr. = 567 Gulden, 25 $\frac{35}{97}$ Kr. der Einkauf.

§. 20.

Begriff der zusammengesetzten Regel Detri.

Die zusammengesetzte Regel Detri faßt jene Aufgaben unter sich, wo es darauf ankömmt, aus mehr als drey gegebenen bekannten Dingen z. B. aus fünf, sieben, neun oder noch mehreren, ein unbekanntes durch Rechnung zu bestimmen. Man nennt diese Rechnung auch die Regel Dequinque weil es am Häufigsten vorkömmt, aus fünf gegebe-

nen Sätzen den unbekannten sechsten zu finden. Ein Beyspiel zur Erläuterung wäre dieses: Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 5870 Gulden in 6 Jahren ertragen, wenn man von 3500 Gulden in 8 Jahren 1400 Gulden Interessen bekömmt? — Hieraus folgt:

I. In der zusammengesetzten Regel Detri ist die Anzahl der gegebenen Dinge immer eine ungerade, d. h. man sucht entweder aus fünf Sätzen den sechsten, aus sieben den achten, aus neun den zehnten u. s. f.

In obigem Beyspiele soll man aus den gegebenen Kapitalien von 5870 und 3500 Gulden, dann aus den verschiedenen Zeiten von 6 und 8 Jahren, während welchen sie auf Interessen liegen und endlich aus den angegebenen Zinsen von 1400 Gulden die unbekannten Interessen finden.

II. Unter den angegebenen Dingen sind zwey unter sich, und das noch übrige fünfte ist mit dem zu findenden sechsten von einerley Art.

Im angeführten Beyspiele sind die 5870 Gulden mit den 3500 Gulden als Kapitalien, ferner die 6 und 8 Jahre als die bestimmte Zeit und endlich die 1400 Gulden mit den zu findenden Zinsen von der nämlichen Art.

III. Jedes Paar dieser gleichartigen Dinge bildet in Vergleichung mit demjenigen, welches noch übrig bleibt, eine einfache Regel Detri. Denn jedes Paar derselben bestimmt in Vergleichung mit diesem einzelnen Gliede die verhältnißmäsige Größe des zu findenden Gliedes.

In der obigen Aufgabe sucht man die Zinsen. Die Größe derselben hängt aber sowohl von der Größe des Kapitals, welches auf Interessen ausgelegt ist, als auch von der Länge der Zeit ab, während welcher dieses Kapital auf Zinsen liegt. Die Größe der zu findenden Zinsen muß folglich einmal nach der Größe der beyden Kapitalien von 5870 und 3500 Gulden, und dann auch noch einmal nach der bestimmten Zeit von 6 und 8 Jahren berechnet werden.

§. 21.

Auflösung der Regel Dequinque.

Um bey der zusammengesetzten Regel Detri aus fünf gegebenen Sätzen den unbekannten sechsten zu finden, nehme man

I. dasjenige von den fünf gegebenen Dingen, welches mit dem zu findenden von einerley Art ist, und setze es als drittes Glied in eine Proportion, wozu X das zu findende vierte Glied ist.

II. Nun nehme man irgend ein Paar von den gegebenen gleichartigen Dingen, vergleiche dasselbe mit dem dritten in I, und bestimme, ob das vierte Glied größer oder kleiner seyn wird, als das dritte. In jenem Falle wird das erste Verhältniß der Proportion vom Kleinern zum Größern, in diesem hingegen vom Größern zum Kleinern werden.

III. Nun gehe man zum andern Paare der gegebenen gleichartigen Dinge über, setze das erste Paar derselben in II. ganz ausser Augen, vergleiche wie in II. das dritte Glied

mit demselben und bestimme wieder, ob es hierdurch vergrößert oder verkleinert werde. Hieraus ergibt es sich, ob das Verhältniß, welches aus diesen beyden gleichartigen Gliedern gebildet wird, vom Kleinern zum Größern, oder vom Größern zum Kleinern sey.

IV. Dieses zweyte Verhältniß in III. setze man unter das erste in II., multiplicire die gleichnamigen Glieder mit einander, suche zu diesen beyden Producten, und zu dem dritten Gliede das verhältnißmäßige vierte, so ist dieses das zu findende sechste in der Aufgabe.

Erläuterung dieser Auflösung.

In obigem Beyspiele sollen Zinsen gefunden werden. Daher werden die gegebenen Interessen zu 1400 Gulden nach I. das dritte Glied einer Proportion, welche man mit den fehlenden Gliedern so vorstellen kann. — : — = 1400 : x; Sieht man nun (mit Hinweglassung der verschiedenen Zeit) allein auf die gegebenen Kapitalien, so ist klar, daß 5870 Gulden mehr Zinsen als 1400 Gulden

bringen werden, da die 3500 Gulden schon 1400 Gulden ertragen. Folglich wird das Verhältniß dieser angegebenen Kapitalien die zu findenden Zinsen vergrößern, und nach II. ist die Proportion diese: 3500 : 5870 = 1400 : X. Jetzt sehe man allein auf die verschiedene Zeit und nehme auf die Kapitale keine Rücksicht mehr, so ergibt sich, daß einerley Summe in 6 Jahren weniger Zinsen bringt, als in 8 Jahren. Daher macht dieser neue Umstand, daß das vierte Glied verringert wird, und nach III. steht nun alles so:

$$\begin{array}{l} 3500 : 5870 = 1400 : X. \\ \;\;\;8 \;:\; 6 \end{array}$$

Multiplicirt man nun hier die ersten und zweyten Glieder miteinander, so entsteht Folgendes:

$$28000 : 35220 = 1400 : X, \text{ woraus}$$

$$X = \frac{35220 \times 1400}{28000} = 1761 \text{ Gulden wird.}$$

Aus dem Bisherigen folgt, daß nach obiger Aufgabe die Größe des sechsten Gliedes durch die Verhältnisse der beyden Paare gleichnamiger Dinge bestimmt werde, und daß folg-

lich hier die einfache Regel Detri zweymal angebracht werden müsse. Nach dieser fände man die erste Proportion in obigem Beyspiele auf folgende Art: 3500 : 5870 = 1400 : X, woraus $X = \frac{5870 \times 1400}{3500}$ geworden wäre. Allein dieses X ist noch nicht das zu findende Unbekannte in obiger Aufgabe, sondern muß erst noch durch das zweyte Verhältniß in III. bestimmt werden, welches Folgendes gibt $8 : 6 = \frac{5870 \times 1400}{3500} : X$, worin $X = \frac{5870 \times 1400 \times 6}{2500 \times 8} = 1761$ wie oben wird. — Weil sich nun dieser Beweis, wie man leicht einsieht, nicht auf die Zahlen des gegenwärtigen Beyspiels allein beschränkt, sondern vielmehr ganz allgemein von allen andern Fällen auf eine ähnliche Art geführt werden kann, so ist die obige Auflösung gerechtfertigt.

§. 22.

Beyspiele zur Uebung.

I. Wie groß muß ein Kapital seyn, welches

in 8 Jahren 2520 Gulden Zinsen bringt, wenn 6800 in 6 Jahren 340 Gulden Interessen geben?

Weil hier die Größe eines Kapitals gesucht wird, so ist das gegebene Kapital von 6800 Gulden das dritte Glied der Proportion. Nimmt man nun auf die Verschiedenheit der Zeit keine Rücksicht, so ist klar, daß ein Kapital, welches 2520 Gulden Zinsen geben soll, größer seyn muß, als ein anderes, welches in eben der Zeit nur 340 Gulden Interessen erträgt. Folglich ist der Ansatz dieser: 340 : 2520 = 6800 : X.

Sieht man hingegen auf die Zeit, so muß man fragen: Wie groß wird ein Kapital seyn, welches in 8 Jahren eine gewisse Menge Zinsen gibt, wenn 6800 Gulden in 6 Jahren ebenso viele Interessen ertragen? — Hier wird das zu findende Kapital kleiner, als 6800 Gulden werden, da es länger auf Zinsen liegt, und das neue Verhältniß, welches in obige Proportion kömmt, ist dieses 8 : 6. Folglich wird der ganze Ansatz folgender:

$$340 : 2520 = 6800 : X$$
$$8 : 6$$

daher $2720 : 15120 = 6800 : X$, und

$$X = \frac{15120 \times 6800}{2720} = 37800 \text{ Gulden.}$$

II. Wenn 18 Personen in 17 Monaten 2350 Gulden zu ihrem Unterhalte brauchen; wie viel werden 64 Personen in 14 Monaten bedürfen?

Weil hier eine gewisse Summe von Gulden gesucht wird, so ist die gegebene von 2350 Gulden das dritte Glied. Vergleicht man die verschiedene Anzahl von Personen mit demselben, so ist klar, daß 64 Menschen in der nämlichen Zeit mehr als 18 brauchen, daß folglich das Verhältniß 18 : 64 werde. Wird hingegen die Zeit in Anschlag gebracht, so ergibt sich, daß man in 14 Monaten weniger als in 17 brauche, daß folglich dieses Verhältniß 17 : 14 wird. Der ganze Ansatz ist daher dieser:

$$18 : 64 = 2350 : x$$
$$17 : 14, \text{ folglich}$$
$$306 : 896 = 2350 : x, \text{ welches}$$
$$x = \frac{896 \times 2350}{306} = 6881 \frac{7}{153} \text{ Guld. gibt.}$$

III. Wenn 24 Personen täglich 7 Stunden arbeiten, so vollenden sie ein gewisses Werk binnen 30 Tagen. Wie viele Arbeiter wird man haben müssen, um dieses Werk in 40 Tagen zu vollenden, wenn sie täglich 9 Stunden arbeiten?

Aus dem Sinne dieser Aufgabe erhellet, daß das dritte Glied die gegebene Zahl von 24 Arbeitern, folglich sowohl das Verhältniß der Stunden, als auch jenes der Tage vom Größern zum Kleinern werden müsse. Daher ist der Ansatz dieser:

$$9 : 7 = 24 : x$$
$$40 : 30, \text{ folglich}$$
$$360 : 210 = 24 : x, \text{ welches}$$
$$x = \frac{210 \times 24}{360} = \frac{504}{360} = 14 \text{ Arbeiter gibt.}$$

Wenn die Rechnung für x eine ganze Zahl und einen ächten Bruch gäbe, so müßte

man, weil sich hier kein Theil eines Arbeiters denken läßt, die nächstfolgende ganze Zahl nehmen.

IV. Zwey Personen messen in 8 Stunden 40 Stecken Holz. Wie viele Männer muß man haben, um 680 Stecken innerhalb 6 Stunden auszumessen?

Die gegebenen 2 Männer geben das dritte Glied, und es folgt, daß sowohl das Verhältniß der Stunden, als jenes der zu messenden Stecken vom Kleinern zum Größern seyn werde. Folglich steht der Ansatz so:

$$6 : 8 = 2 : x$$
$$40 : 680 \text{, welches}$$
$$240 : 5440 = 2 : x \text{ gibt, woraus}$$
$$x = \frac{5440 \times 2}{240} = \frac{1088}{24} = 45\frac{1}{3} \text{ wird, wo-}$$

für man 46 setzen muß.

Da bey jeder Regel Dequinque aus fünf gegebenen Stücken das verhältnißmäßige sechste gesucht und auch gefunden wird, so ist klar, daß irgend fünf dieser Größen die sechste jedesmal bestimmen müssen. Daher

lassen sich aus jeder solcher Aufgabe noch fünf andere Fragen bilden. Die Bildung solcher Fragen durch ihre Einkleidung in Worte ist eine sehr lehrreiche Uebung für Anfänger. Weil jedoch unter diesen sechs Größen drey Paare von gleichartigen sind, so entstehen eigentlich auch nur drey Hauptfragen, deren jede sich aber wieder in zwey ähnliche abtheilt. Zum Beyspiele diene die Frage:

1) Wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 8 Jahren 2520 Gulden Zinsen bringt, wenn 6800 in 6 Jahren 340 Gulden Interessen geben? Antwort: 37800 fl.

2) Wie lange muß ein Kapital von 37800 fl. ausgeliehen seyn, um 2520 fl. als Zinsen zu bringen, wenn 6800 in 6 Jahren 340 fl. Interessen geben? Antwort: 8 Jahre.

3) Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 37800 fl. in 8 Jahren tragen, wenn man von 6800 fl. in 6 Jahren 340 fl. Interessen erhält? Antwort: 3520 fl.

Auf gleiche Weise lassen sich diese Fragen auch stellen, um entweder das Kapital von

6800 fl., oder die Zeit von 6 Jahren, oder die Zinsen zu 340 Gulden als viertes Glied zu finden.

§. 23

Auflösung zusammengesetzter Fälle.

I) Oefters hat der Fall Statt, daß man aus mehr, als fünf gegebenen Dingen ein verhältnißmäsiges Unbekanntes finden soll. Die Regel zur Auflösung dieser Aufgaben ist hier immer die nämliche, wie oben; nur mit dem Unterschiede, daß für jedes neue Paar von Gliedern auch ein neues Verhältniß in den Ansatz kömmt, dessen Glieder nach der obigen Weisung geordnet werden. Ein Beyspiel wird dieses deutlicher machen. Man fragt; wie groß muß ein Kapital seyn, welches innerhalb 10 Jahren zu 4 Procent 5300 Gulden Interessen bringt, wenn eine Summe von 6500 Gulden binnen 6 Jahren zu 5 Procent 1950 Gulden Zinsen gibt? — Hier sind sieben Dinge angegeben, man sucht das

verhältnißmäßige achte. Von 6 derselben sind immer zwey unter sich, und das siebente ist mit dem zu findenden 8ten von einerley Art. Diese sechs Glieder geben drey Verhältnisse, deren jedes (in Vergleichung mit dem dritten) die Größe des unbekannten achten bestimmen hilft. Sieht man zuerst allein auf die 10 und 6 Jahre, so wird das zu findende Kapital kleiner als 6500 Gulden, folglich das erste Verhältniß = 10 : 6. Nimmt man nun auf 4 und 5 Procent Rücksicht, so wird nach diesem X größer als 6500 Gulden folglich das zweyte Verhältniß = 4 : 5. Betrachtet man endlich die 5300 Gulden und 1950 Gulden Interessen, so wird hieraus wieder X größer als 6500 Guld.; daher das Verhältniß wieder 1950 : 5300. Der Ansatz ist folglich dieser:

$$\left.\begin{array}{r} 10 : 6 \\ 4 : 5 \\ 1950 : 5300 \end{array}\right\} = 6500 : X.$$

Folglich 10 X 4 X 1950 : 6 X 5 X 5300 = 6500 : X, oder $X = \frac{6 X 5 X 5300 X 6500}{10 X 4 X 1950}$.

II. Aus dem Bisherigen erhellet überhaupt, daß für jedes Paar gleichnamiger Dinge, welche, nebst den fünf angegebenen noch vorkommen können, immer ein neues Verhältniß mehr in den Ansatz kommen werde. Oft hat auch der Fall Statt, daß die Anzahl der in der Aufgabe enthaltenen Dinge dadurch vermindert wird, daß man mehrere in einander multipliciren muß, ehe die Rechnung ausgeführt werden kann.

Wenn z. B. der Körperraum einer Mauer, eines Grabens oder dergl. nach Länge, Breite und Tiefe gegeben ist, so muß man (nach Gründen, deren Richtigkeit hier unbewiesen angenommen werden muß) um die ganze Größe dieser Räume zu bestimmen, ein Product aus Länge, Breite und Tiefe machen, weil sich diese Producte eben so verhalten, wie die Räume, zu welchen diese drey Ausdehnungen als Factoren gehören. Man fragt: In wieviel Zeit werden 20 Arbeiter eine Mauer, welche 35 Schuhe lang, 12 Schuhe hoch und 3 Schuhe breit ist, aufführen, wenn 12 Arbeiter eine andere Mauer von 48 Schuhen Länge, von 8 Schuhen Höhe und 2 Schuhen

Dicke binnen 20 Tagen errichten? Um hier die ganze Größe von beyden Mauern zu finden, muß man die Länge, Breite und Dicke einer jeden mit einander multipliciren. Dieses gibt, für die Größe der ersten Mauer, ein Product $= 35 \times 12 \times 3 = 1260$, und für die letzte $= 48 \times 8 \times 2 = 768$. Durch dieses Verfahren ist also obige Frage in eine gewöhnliche Aufgabe von fünf Sätzen verwandelt worden, und der Ansatz dieser:

$$\left.\begin{array}{r} 20 : 12 \\ 768 : 1260 \end{array}\right\} = 20 : x, \text{ und } x = \frac{12 \times 1260 \times 20}{20 \times 768} = \frac{12 \times 1260}{768} = 19\frac{528}{768}$$

Tage, d. h. beynahe 20 Tage.

§. 24.

Erklärung der Reesischen Regel.

I. Alle Fragen, welche bey der Regel De-quinque vorkommen, lassen sich in zwey Sätze fassen, wovon der eine der Bedingnißsatz, der andere aber der Fragsatz genannt werden kann. Bedingnißsatz heißt jener Theil der Aufgabe, welcher die drey

gegebenen unter sich ungleichartigen Glieder enthält und die *Bedingniß* ausspricht, auf welche sodann die Frage gegründet ist. Den *Fragsatz* aber nenne ich jenen Theil der Aufgabe, welcher nur zwey der gegebenen Glieder enthält und die *Frage* ausspricht, welche eigentlich beantwortet werden soll. Zur Erläuterung dieser Erklärung sey die Aufgabe diese:

Was kostet der Transport von 875 ℔ auf eine Entfernung von 18 Stunden Wegs, wenn man für 600 ℔ auf eine Entfernung von 20 Stunden Wegs 9 Gulden zu zahlen hat?

Hier heißt der Bedingnißsatz so: *Wenn 600 ℔ auf 20 Stunden Wegs zu transportiren 9 fl. kosten*, und der Fragsatz lautet: *Was wird der Transport von 875 ℔ auf 18 Stunden Wegs kosten?*

Bey einer kleinen Ueberlegung wird es dem Anfänger leicht seyn, jede Frage der Regel Dequinque nach diesen beyden Sätzen zu ordnen.

Betrachtet man den Fragsatz, so ergibt sich, daß eines seiner beyden Glieder vorzüglich die Frage veranlaßt.

Dieses Glied heißt das Fragglied. In dem vorigen Beyspiele sieht man sogleich, daß die zu transportirenden 875 ℔ dieses Fragglied bilden, weil es darauf ankömmt, die Transportkösten dieses Gewichts zu finden.

II. Sollte man diese Aufgabe nach der obigen Vorschrift auflösen, so entständen folgende Verhältnisse:

600 ℔ : 875 ℔ = 9 fl. : X und 20 Stund. : 18 Stunden; folglich 600 X 20 : 875 X 18 = 9 : X oder X X 600 X 20 = 875 X 18 X 9, woraus der Werth für X = $\frac{875 \times 18 \times 9}{600 \times 20}$ gefunden wird.

In dem Ausdrucke X X 600 X 20 = 875 X 18 X 9 stehen die Factoren in einer wagrechten Reihe neben einander. Ordnet man sie nun, nach beyfolgendem Muster, zur Rechten und Linken eines gezogenen Senkstrichs unter einander; nämlich:

X (Gulden)	875 (Pfunde)
600 (Pfunde)	18 (Stunde)
20 (Stunde)	9 (Gulden)

so sieht man sogleich, daß der Werth von X gefunden wird, wenn man das Product aller Glieder zur Rechten mit dem Producte aller Glieder zur Linken dividirt.

Da diese Berechnung von X sehr bequem ist, so ist nur noch die Regel zu entwickeln, nach welcher die gegebenen Glieder zur Rechten und Linken des Senkstrichs zu ordnen sind. Diese Stellung der Glieder nennt man den Reesischen Ansatz.

§. 25.

Bildung des Reesischen Ansatzes.

Wenn die Glieder in der Regel Dequinque gerade Verhältnisse bilden, so bemerke man:

I. Man gebe der Frage die Stellung der Sätze, daß der Bedingnißsatz zuerst steht und der Fragsatz auf ihn folgt.

II. Nachdem ein Senkstrich gezogen worden ist, setze man das unbekannte Glied X oben

zur Linken, und zur Rechten in gleicher Höhe das Fragglied.

III Unter das Fragglied setze man zuerst das in dem Fragsatze noch vorkommende Glied, und sodann jenes Glied des Bedingnißsatzes, welches mit dem unbekannten Gliede X gleichartig ist.

IV. Unter das unbekannte Glied werden nun die noch in dem Bedingnißsatze gegebenen beyden Glieder gestellt. Dividirt man nun

V. das Product aus den drey Zahlen zur Rechten des Senkstrichs durch das Product aus den beyden Zahlen zu dessen Linken, so ist der Quotient der Werth von X.

Die Richtigkeit dieser Regeln flieset aus den bisherigen Sätzen, und bedarf daher keiner weitern Auseinandersetzung.

Beyspiele.

I. Wieviel werden 15 Menschen in 9 Monaten brauchen, wenn die Ernährung von 8 Menschen in 19 Monaten 4000 Gulden erfodert?

Nach Regel I. gebe man der Aufgabe folgende Stellung: Wenn 8 Menschen in 19 Monaten 4000 Gulden brauchen, wieviel bedürfen 15 Menschen in 9 Monaten?

Regel II. gibt dieses:

X (Gulden) | 15 (Menschen)

Nach Regel III. wird:

X (Gulden)	15 (Menschen)
	9 (Monate)
	4000 (Gulden)

Nach Regel IV. erhält man endlich dem ganzen Ansatz:

X (Gulden)	15 (Menschen)
8 (Menschen)	9 (Monate)
19 (Monate)	4000 (Gulden)

Regel V. gibt endlich $X = \frac{15 \times 9 \times 4000}{8 \times 19}$

$= 3552 \frac{12}{19}$ Gulden, oder 3552 Gulden, 37 Kr. $3 \frac{11}{19}$ Pf.

Nach der obigen allgemeinen Weisung wäre der Ansatz dieser:

$$8 : 15 = 4000 : x$$
$$19 : 9$$

woraus $x = \frac{15 \times 9 \times 4000}{8 \times 19}$ wird, wie so eben auch gefunden worden ist.

II. Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 3250 Gulden in 8 Jahren einbringen, wenn 1000 Gulden in 3 Jahren 250 Gulden Zinsen geben?

Nach Anwendung obiger Regeln entsteht folgender Ansatz der Glieder:

x (Zinsen)	3250 (Guld. Kap.)
1000 (Guld. Kap.)	8 (Jahre)
3 (Jahre)	250 (Guld. Zinsen)

Dies gibt folglich $x = \frac{3250 \times 8 \times 250}{1000 \times 3}$ $= \frac{325 \times 8 \times 25}{30} = \frac{325 \times 200}{3} = \frac{325 \times 20}{3}$ $= \frac{6500}{3} = 2166 \frac{2}{3}$ Gulden, oder 2166 Gulden 40 Kr.

Nach der frühern Regel wäre der Ansatz dieser:

$$1000 : 3250 = 250 : x$$
$$3 : 8$$

woraus für x derselbige Werth erhalten wird.

§. 26.

Weitere Bemerkungen darüber.

I. Wenn die Glieder nach dem Reesischen Ansatze geordnet sind, so kann man jede Zahl zur Linken des Senkstrichs gegen jede beliebige zur Rechten desselben mit einem gemeinsamen Divisor, (wenn es sich thun läßt) ohne Rest aufdividiren und hierdurch diese Glieder heben, wodurch der Werth von x nicht verändert wird, weil der Quotient derselbige bleibt, wenn man den Divisor und Dividenden mit der nämlichen Zahl aufdividirt. Dieses Verfahren dient hier eben so zur Abkürzung der Rechnung, wie oben das Heben der Brüche oder das Heben der Verhältnisse.

II. Wenn Bruchglieder vorkommen, so kann man den Nenner jedes dieser Glieder dadurch

sehr leicht wegschaffen, daß man mit diesem weggelassenen Nenner irgend ein Glied jenseits des Senkstrichs multiplicirt. Denn es ist nun gerade so, als hätte man den Divisor und Dividenden mit der nämlichen Zahl multiplicirt. Man fragt z. B. Wieviel Waare wird man für $8\frac{3}{4}$ Gulden erhalten, wenn man für $40\frac{1}{2}$ Gulden $64\frac{3}{4}$ ℔ bekömmt? Diese Aufgabe bildet eine Regel Detri und kann ebenfalls nach der Reesischen Regel aufgelöst werden. Der Ansatz ist:

$$\begin{array}{r|l} \mathfrak{X} & 8\frac{3}{4} \\ 40\frac{1}{2} & 64\frac{3}{4} \end{array}$$ die Bruchglieder eingerichtet, gibt

---

$$\begin{array}{r|l} \mathfrak{X} & \frac{35}{4} \\ \frac{81}{2} & \frac{259}{4} \end{array}$$ die Nenner 2 und 4 weggebracht, gibt

---

x | 70
324 | 259 den andern Nenner 4 ebenfalls.
| 4

x | 70
1296 | 259 beyderseits mit 2 gehoben, gibt

x | 35
648 | 259 woraus

$$x = \frac{35 \times 259}{648} = 12 \text{ ℔, } 31 \text{ Lothe, } \frac{50}{81}$$

Quentchen wird.

III. Wenn in der gegebenen Aufgabe (der Regel Dequinque) Glieder vorkommen, welche in einem verkehrten oder umgekehrten Verhältnisse stehen, so werden dieselbe auch in verkehrter Ordnung zur Seite des gezogenen Senkstrichs gesetzt, d. h jedes Glied, welches bey dem geraden Verhältnisse zur Rechten stände, wird nun auf die linke Seite gestellt, und umgekehrt. Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Folgendes Beyspiel soll es erläutern:

Zur Vollendung einer gewissen Arbeit sind 18 Menschen 10 Tage lang beschäftigt, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten. In wie viel Zeit werden 14 Menschen eben diese Arbeit, bey täglicher 12stündiger Arbeitszeit, vollenden?

X (Tage)	18 (Menschen)
14 (Menschen)	8 (Stunden)
12 (Stunden)	10 (Tage)

gehoben:

X	3
7	4
2	10 oder

X	3
7	4
1	5 folglich

$$X = \frac{3 \times 4 \times 5}{7} = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7} \text{ Tage.}$$

Da hier sowohl die Zahl der Arbeiter, als auch die Menge der täglichen Arbeitsstunden im umgekehrten Verhältnisse der Vollendungszeit stehen, so mußten auch die Glieder in verkehrter Ordnung zur Rechten und Linken

des Senkstrichs gesetzt werden. Es ist den Anfängern sehr zu rathen, sich in dem Ansatze und in der Auflösung solcher Aufgaben zu üben. Die allgemeine Regel heißt: Bey geraden Verhältnissen hat der gewöhnliche Ansatz, bey verkehrten Verhältnissen aber der umgekehrte Ansatz Statt.

§. 27.

Begriff der gesellschaftlichen Theilrechnung.

Die Gesellschaftsrechnung (gesellschaftliche Theilrechnung) begreift jene Fälle unter sich, wo man a) bald aus einer willkührlichen Annahme, bald b) aus Gründen der natürlichen Billigkeit eine gegebene Zahl in mehrere Theile zerlegen soll, welche ein bestimmtes Verhältniß bilden.

Erläuterung zu a).

Es stirbt Jemand mit Hinterlassung eines Vermögens von 25000 Gulden und setzt 3 Personen: A, B und C unter der Bedingung

zu Erben ein, daß, wenn A 7 Gulden bekömmt, B immer 5 und C 2 Gulden haben solle. Wie viel wird Jeder bekommen? Offenbar sucht man hier 3 Zahlen, welche sich wie 7 : 5 : 2 verhalten und zusammen 25000 betragen.

Zu b) Vier Handelsleute rüsteten ein Schiff mit Waaren aus, deren Werth 150000 Gulden betrug. Der erste gab dazu 60000, der andere 3000, der dritte 49000 und der vierte 11000 Gulden. Durch den Verkauf dieser Waaren gewannen sie 64900 Gulden. Wie groß ist der Gewinn jedes Einzelnen? Da dieser im Verhältnisse der Zulagen stehen muß, so soll die Zahl 64900 in 4 Theile getheilt werden, welche sich wie obige 4 Zulagssummen verhalten.

§. 28.

Anweisung zur Auflösung der gesellschaftlichen Theilrechnung.

Es kömmt hierbey immer auf die Aufgabe an: eine gegebene Zahl in eine gegebene

Menge von Theilen zu zerlegen, welche ein bestimmtes Verhältniß, und zusammen genommen die gegebene Zahl wiederum bilden. Man bemerke folgende Regeln:

I. Die Zahlen, welche das Verhältniß der Theilung bestimmen, d. h. die **Verhältnißzahlen** werden addirt.

II. Nun sage man: wie sich die Summe aller Verhältnißzahlen zu der zu theilenden Zahl verhält, ebenso verhält sich jede dieser Verhältnißzahlen einzeln zu dem ihr entsprechenden Theile der zu theilenden Zahl.

III. Bildet man demnach so viele Proportionen, als Verhältnißzahlen gegeben sind, und löset jede auf, so erhält man die zu findenden Zahlen.

Erläuterung.

Die Zahl 48 soll in zwey Theile getheilt werden, welche sich wie 3 : 5 verhalten. Dies wird geschehen, wenn man 48 in 3 + 5 d. h. in 8 Theile theilt und von diesen einmal 3 und dann 5 zusammennimmt. Denn $\frac{48}{8}$

$\times 3 + \frac{48}{8} \times 5 = 3 + 5 \times \frac{48}{8} = 8 \times \frac{48}{8}$ $= 48$. Auch verhält sich $\frac{48}{8} \times 3 : \frac{48}{8} \times 5$ $= 3 : 5$. Folglich sind die Bedingnisse der Aufgabe erfüllt und die zu suchenden Zahlen werden $= \frac{48 \times 3}{8} = \frac{144}{8} = 18$, und $\frac{48 \times 5}{8}$ $= \frac{240}{8} = 30$, welche den Foderungen entsprechen, da $18 : 30 = 3 : 5$, und $18 + 30$ $= 48$ ist. Auch ist jene Zahl das vierte Glied der Proportion $8 : 48 = 3 : x$, und dieses vierte Glied in $8 : 48 = 5 : y$.

Allgemeiner Beweis.

Wenn a nach Verhältniß von $m : n$ getheilt werden soll, so ist

1) $m + n : a = m : \frac{am}{m + n}$ der I. Theil,

und

2) $m + n : a = n : \frac{an}{m + n}$ der II. Theil

der zu theilenden Größe a. Denn es ist

1) $\frac{am}{m+n} : \frac{an}{m+n} = m : n$, weil jedes Glied mit $\frac{a}{m+n}$ gehoben werden kann; auch ist

2) $\frac{am}{m+n} + \frac{an}{m+n} = \frac{am+an}{m+n} = \frac{a \times (m+n)}{m+n} = a.$

Folglich sind die beyden Bedingnisse der Aufgabe erfüllt.

Beyspiele.

I. Die Zahl 468 soll in 3 Theile, welche sich wie 4 : 7 : 9 verhalten, eingetheilt werden. Die Proportionen zur Auflösung sind folgende:

a) $4 + 7 + 9 : 468 = 4 : x$, woraus

$$x = \frac{468 \times 4}{4+7+9} = \frac{1872}{20} = 93\frac{3}{5}.$$

b) $4 + 7 + 9 : 468 = 7 : y$, wo

$$y = \frac{468 \times 7}{4+7+9} = \frac{3276}{20} = 163\frac{4}{5}.$$

c) $4 + 7 + 9 : 468 = 9 : z$, wo

$$z = \frac{468 \times 9}{4+7+9} = \frac{4212}{20} = 210\frac{3}{5}.$$

Diese gefundene 3 Zahlen haben die Eigenschaft, daß

1) $93\frac{3}{5} : 163\frac{4}{5} : 210\frac{3}{5} = 4 : 7 : 9$, und

2) $93\frac{3}{5} + 163\frac{4}{5} + 210\frac{3}{5} = 468$ ist.

II. Sollte 468 in 4 Theile, welche sich wie $2 : 3 : 5 : 8$ verhalten, eingetheilt werden, so sind die Proportionen hierzu diese:

a) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 2 : w$,
b) $2 + 3 + 5 + 8 : 469 = 3 : x$
c) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 5 : y$
d) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 8 : z$, und man findet, wenn die Rechnung ausgeführt wird, $w = 52$; $x = 78$; $y = 130$ und $z = 208$, welches die verhältnißmäßigen Theile sind, in welche die Zahl 468 getheilt worden ist. Die Probe darüber ist leicht anzustellen.

§. 29.

Auflösung der Beyspiele des §. 27.

I. Um die Erbschaftstheile x, y und z des A, B und C zu bestimmen, muß man folgende drey Proportionen auflösen:

a) $7 + 5 + 2 : 25000 = 7 : x$
b) $7 + 5 + 2 : 25000 = 5 : y$
c) $7 + 5 + 2 : 25000 = 2 : z.$

Aus a) wird $x = \frac{25000 \times 7}{7+5+2} = \frac{175000}{14}$ $= 12500$ Gulden für A.

Aus b) ist $y = \frac{25000 \times 5}{7+5+2} = \frac{125000}{14} =$ $8928 \frac{4}{7}$ Guld. für B.

Aus c) ist $z = \frac{25000 \times 2}{7+5+2} = \frac{50000}{14} =$ $3571 \frac{3}{7}$ Gulden für C.

Diese Werthe für x, y und z haben, wie man leicht aus einer Probe ersehen kann,

die Eigenschaften, welche das obige Beyspiel fodert.

II. Wenn die vier Kaufleute A, B, C und D, und die zu suchenden Gewinne eines jeden w, $\mathfrak{X}$, y und z heißen, so bekömmt man, nachdem die Zuschüsse Aller in eine Summe gebracht worden, folgende Proportionen:

a) 150000 : 64900 = 60000 : w, oder 15 : 64900 = 6 : w, woraus $w = \frac{64900 \times 8}{15} = 25960$ Gulden wird.

b) 150000 : 64900 = 30000 : $\mathfrak{X}$, oder 15 : 64900 = 3 : $\mathfrak{X}$, woraus $\mathfrak{X} = \frac{64900 \times 3}{15} =$ 12980 Gulden wird.

c) 150000 : 64900 = 49000 : y, oder 150 : 64900 = 49 : y, woraus $y = \frac{64900 \times 49}{150} = 21200$ und $\frac{2}{3}$ Gulden wird.

d) 150000 : 64900 = 11000 : z, oder 150 :

$$64900 = 11 : z\text{, woraus } z = \frac{64900 \times 11}{150}$$

$$= 4759\,\frac{1}{3}\text{ Gulden wird.}$$

Von der Richtigkeit dieser Zahlen kann man sich wieder durch die bekannte Probe überzeugen. Auch kann man sich bey diesen Rechnungen der Mühe überheben, die letzte Proportion besonders aufzulösen, wenn man eine Summe aus allen bereits schon gefundenen vierten Gliedern macht, und dieselbe von der einzutheilenden Zahl abzieht. Der hierdurch entstehende Rest ist das vierte Glied der letzten Proportion. So wird eine Summe von den gefundenen Werthen für w, x und y,

$$\text{oder } 25960 + 12980 + 21200\,\frac{2}{3} = 60140\,\frac{3}{3}$$

$$\text{und } 64900 - 90140\,\frac{2}{3} = z = 4759\,\frac{1}{3}\text{, wie}$$

vorhin durch die Auflösung der Proportion gefunden wurde.

§. 38.

Kapital-Werth nach der Zeit, nebst Anwendungen.

Der Werth eines Kapitals hängt nicht allein von seiner absoluten Größe, sondern zugleich von der Zeit ab, während welcher es zur Betreibung eines gemeinschaftlichen Handels verwendet wird. Es erhellet zugleich, daß eine und die nämliche Summe in der doppelten Zeit den zweyfachen, in der dreyfachen Zeit den dreyfachen Gewinn u. s. f. ertragen werde; d. h. es erhellet, daß der Verhältnißwerth eines Kapitals durch ein Product aus der absoluten Größe desselben in die Zeit, während welcher dasselbe zu irgend einem Handel angelegt ist, bestimmt werden müsse. Diese Betrachtung gibt Veranlassung zu folgenden Fragen:

I. A, B und C treten in einen Gesellschaftshandel. Der A erlegte 2000 Gulden und ließ sie 6 Monate in der gemeinschaftlichen Casse. Der B schoß gleich anfangs 3500 Gulden, welche 7 Monate im Handel

blieben. Der C endlich gab 1850 Gulden und diese waren 9 Monate in der Handlung. Der gemeinschaftliche Gewinn war 1400 Gulden. Wieviel bekömmt Jeder?

Hier ist der Verhältnißwerth der Zulage des A = 2000 X 6 = 12000, jener des B = 3500 X 7 = 24500 und endlich der des C = 1850 X 9 = 16650. Die Summe dieser drey Producte ist = 53150; folglich bekömmt man folgende Proportionen:

a) 53150 : 1400 = 12000 : x dem Gewinne des A.

b) 53150 : 1400 = 24500 : y dem Gewinne des B

c) 53150 : 1400 = 16650 : z dem Gewinne des C. Die Rechnung gibt:

$$x = \frac{1400 \times 12000}{53150} = 316 \frac{460}{5315} \text{ Gulden.}$$

$$y = \frac{1400 \times 24500}{53150} = 645 \frac{1825}{5315} \text{ Gulden.}$$

$$z = \frac{1400 \times 16650}{53150} = 438 \frac{3030}{5315} \text{ Gulden.}$$

II. A, B und C treten in einen gemeinschaftlichen Handel. Der A schoß hierzu 3000 Gulden in die Gesellschaftskasse. Nach Verlauf von 6 Monaten nimmt er wieder 1000 Gulden heraus, und nach weitern 8 Monaten gibt er noch 500 Gulden zum Handel. Der B erlegte gleich anfangs eine Summe von 4500 Gulden und schoß nach 10 Monaten noch 500 Gulden hinzu. Der C endlich gab 2500 Gulden und ließ sie 24 Monate lang, bis zu dem Ende des Geschäftes, in der Handlung. Mit diesen einzelnen Zulagen gewannen sie eine Summe von 3560 Gulden. Wieviel ist der Gewinn jedes Einzelnen?

Hier blieben die 3000 Gulden des A auf 6 Monate in der Handlung; folglich ist der verhältnißmäsige Werth dieses Kapitals = 3000 X 6 = 18000. Nun kommen 1000 Gulden von diesen 3000 hinweg; daher blieben noch 2000 Gulden übrig, welche 8 Monate ohne Veränderung im Handel waren, deren Werth also = 16000 ist. Endlich kamen noch 500 Gulden hinzu, daher wurden aus den 2000 Gulden nunmehr 2500, deren Werth, da sie noch 10 Monate bey der Hand-

lung blieben, = 2500 X 10 = 25000 ist. Der ganze verhältnißmäßige Zuschuß des A ist daher = 18000 + 16000 + 25000 = 59000.

Der B gab sogleich 4500 Gulden, welche 10 Monate im Handel blieben, deren Werth also = 45000 ist. Nun erlegte er noch 500 Gulden, wodurch 4500 + 500 = 5000 Guld. in der Handlung waren, welche, da sie noch 14 Monate in der Casse blieben, einen Werth von 5000 X 14 = 70000 hatten. Der Antheil des B betrug also 45000 + 70000 = 115000.

Der C endlich gab 2500 und ließ sie bis zu Ende des Geschäfts, d. h. 24 Monate lang, im Handel. Daher ist der Werth dieser Zulage 2500 X 24 = 60000.

Die fernere Auflösung dieser Aufgabe beruht nun darauf, daß der gemeinschaftliche Gewinn von 3560 Gulden in drey Theile getheilt wird, die sich wie 59000 : 115000 : 60000; oder, welches einerley ist, wie 59 : 115 : 60 verhalten. Diese Rechnung ausgeführt, gibt einen Gewinn für A = 897 $\frac{71}{117}$ Gulden, für

B = $1749 \frac{67}{117}$ Gulden, und für C = $912 \frac{96}{117}$ Gulden.

Um die Größe des verhältnißmäßigen Zuschusses von A zu bestimmen, könnte man auch so schließen: Wenn die 3000 Gulden während der 24 Monate des gemeinschaftlichen Handels nicht vermehrt oder vermindert worden wären, so hätten sie am Ende dieser Zeit offenbar einen Werth = 3000 X 24 = 72000. Weil nun aber nach Ablauf von 6 Monaten 1000 Gulden davon weggenommen wurden, so nahm man diese 1000 Gulden um 24 — 6 = 18 Monate länger in der Handlung an, als sie es eigentlich seyn können, wenn man den ganzen Verhältnißwerth = 72000 setzt. Nun ist aber der Werth von 1000 Gulden in 18 Monaten = 18000, folglich ist 72000 — 18000 = 54000, der Werth desjenigen, was der A bis hierher erlegte. Allein nach 14 Monaten schoß A noch 500 Gulden zu, welche 24 — 14 oder 10 Monate in der Handlung geblieben sind, deren Werth also = 5000 ist.

Dieser, zu dem obigen gesetzt, gibt 54000 + 5000 = 59000 für den ganzen verhältnißmäßigen Zuschuß des A, wie oben. — Erläuterungen, wie diese, sind dem Anfänger sehr nützlich, indem sie ihn mit den Bedingnissen und der Auflösung dieser Aufgaben um so mehr bekannt machen.

§. 31.

Begriff der Vermischungsrechnung.

Die Vermischungsrechnung faßt jene Fälle in sich, wo entweder a) aus der Menge und dem Preise verschiedener zu vermischenden Dinge der Preis des gemischten Körpers überhaupt, oder eines bestimmten Theiles desselben; oder b) die verhältnißmäßige Hergabe mehrerer zu vermischenden Dinge gesucht wird, deren Preis (für eine bestimmte Menge) angegeben ist, um hieraus einen Körper, der bey bestimmter Größe einen gegebenen Mittelpreis hat, zu erhalten.

Erläuterung zu a). Ein Wirth mischt 8 Maas 10 Batzenwein, 12 Maas 15 Batzen-

wein und 9 Maas 12 Batzenwein zusammen. Man soll entweder den Werth des ganzen Gemisches, oder einer Maas des gemischten Weines finden.

Zu b). Man will aus zwey Weingattungen, von deren einer die Maas 18 Batzen und von der andern 12 Batzen kostet, einen Wein so zusammenmischen, daß eine Maas des Gemisches 16 Batzen werth seyn soll. Wie viel muß jede Gattung dazu hergeben?

§. 32.

Erste Art von Fällen der Vermischungsrechnung.

Der Werth eines gewissen Maases von mehreren zusammenzumischenden Dingen, und die Menge eines jeden derselben ist gegeben. Man soll hieraus den Werth der ganzen Mischung, oder eines bestimmten Theiles derselben finden.

I. Man multiplicire den Werth des Maases eines jeden der gegebenen Körper mit einer

Zahl, welche anzeigt, wie oft dieses Maas in jedem dieser Dinge enthalten ist.

II. Alle diese einzelne Producte in I. bringe man in eine Summe, so ist diese der Werth des ganzen Gemisches.

III. Wird aber diese Summe in II. durch die Menge der Maase aller gegebenen Dinge dividirt, so ist der hieraus entstehende Quotient der Werth eines Maases vom Gemische.

IV. Um den Werth eines bestimmten Theils vom Gemische zu finden, multiplicire man die Summe in II. mit einem Bruche, welcher diesen Theil ausdrückt.

Die Richtigkeit dieser Auflösung beruht auf dem Begriffe und den Anwendungen der Multiplication und Division, und bedarf keiner weitern Rechtfertigung.

Beyspiele.

I. **Auflösung des Beyspiels in a) des vorigen §.**

Der Werth des 8 Batzenweines, welcher zur Mischung kömmt, ist, da man 10 Maase

von demselben nimmt, $= 8 \times 10 = 80$ Batzen. Eben so jener der 12 Maase des 15 Batzenweins $= 12 \times 15 = 180$ Batzen. Endlich jener der 9 Maase vom 12 Batzenwein $= 9 \times 12 = 108$ Batzen. Weil nun das Gemische nur aus diesen drey Weinen besteht, so ist offenbar der Werth der ganzen Mischung $= 80 + 180 + 108 = 368$ Batzen. Allein dieses Gemische enthält nun auch $10 + 12 + 9 = 31$ Maase, daher ist der Werth einer Maas des gemischten Weins $= \frac{368}{31} = 11\frac{27}{31}$, oder beynahe 12 Batzen.

Wollte man den Werth irgend eines bestimmten Theils der Mischung. z. B. jenen des $\frac{2}{3}$ Theils finden, so wäre dieser $= 368 \times \frac{2}{3} = \frac{736}{3} = 245\frac{1}{3}$ Batzen u. s. f.

II. Man vermischt drey Gattungen von Früchten. Von der ersten, wovon das Malter 5 Gulden kostet, nimmt man 12 Malter; von der zweyten, wovon das Malter 7

Gulden gilt, nimmt man 18 Malter, und von der dritten, wovon das Malter 9 Gulden kostet, nimmt man 10 Malter. Wieviel wird das ganze Gemische und ein Malter desselben werth seyn? Hier ist

$5 \times 12 = 60$ Guld., der Werth der ersten Gattung.

$7 \times 18 = 126$ Guld., der Werth der zweyten Gattung.

$9 \times 10 = 90$ Guld., der Werth der dritten Gattung;

folglich 276 Gulden der Werth der ganzen Mischung, und, da $5 + 7 + 9 = 21$ Malter im Ganzen vorhanden sind, der Preis eines Malters vom Gemische $= \frac{276}{21} = 13\frac{1}{7}$ Gulden.

Diese Rechnung hat auch eine besondere Anwendung bey Vermischung der Metalle. Wenn ein Metall, z. B. Gold oder Silber, ohne alle fremdartige Theile ist, so heißt es rein. Wird hingegen ein anderes Metall beygemischt, um dem erstern eine größere

Stärke zu geben, so nennt man dieses bey geschmolzene Metall den Zusatz. So kömmt zu dem Silber ein Zusatz von Kupfer und das Silber hat einen größern oder geringern Werth, je nachdem die Menge des Zusatzes, bey einerley Gewicht, kleiner oder größer ist. Man nennt 16 Lothe reines Silber eine Mark und das reine Silber sechzehnlöthig. Kämen unter 16 Lothe Masse nur 15 Lothe reines Silber und ein Loth Kupfer, so heißt das Silber fünfzehnlöthig. So gibt es 14, 13, 12, 11, 10 löthiges Silber, wobey immer die Zahl des löthigen die Menge des reinen Silbers, die Unterschiede dieser Zahl von 16 Lothen hingegen die Kupfertheile angeben, welche in den 16 Lothen gemischten Silbers enthalten sind.

III. Wie viellöthig wird eine Mischung seyn, welche aus 12 Lothen 10löthigem, aus 8 Lothen 12löthigem, aus 15 Lothen 13löthigem und aus 10 Lothen 15löthigem Silber besteht?

In dem 10löthigen Silber sind 10 Theile reines Silber und 6 Theile Zusatz; folglich

werden die 12 Lothe dieses Silbers 12 X 10 = 120 Theile reines Silber geben. Ebenso sind in den 8 Lothen des 12löthigen Silbers 8 X 12 = 96, in den 15 Lothen des 13löthigen Silbers 15 X 13 = 195 und in den 10 Lothen des 15löthigen 10 X 15 = 150 Theile reines Silber enthalten. Daher wird die Summe des ganzen Gemisches 120 + 96 + 195 + 150 = 561 reine Silbertheile geben. Allein die Mischung besteht aus 12 + 8 + 15 + 10 = 45 Lothen Silber. Folglich kommen auf ein Loth nur $\frac{561}{45} = 12\,\frac{21}{45}$ Theile von reinem Silber, oder das aus dieser Mischung entstandene Silber ist $12\,\frac{21}{45}$, oder $12\,\frac{7}{15}$ löthig.

Diese Aufgaben können auch dergestalt aufgelößt werden, daß man die Menge der Kupfertheile bestimmt, welche in der ganzen Mischung enthalten seyn müssen. So sind die Theile des Kupfers, welche in obigen Silbergattungen angegeben wurden, diese: Die 12 Lothe enthalten 12 X 6 = 72, die

8 Lothe geben 8 X 4 = 32, die 15 Lothe enthalten 15 X 3 = 45 und die 10 Lothe haben 10 X 1 = 10 Lothe Kupfer. Aber die ganze Zusammenmischung besteht aus 45 Lothen. Daher enthält ein Loth davon $\frac{159}{45} = 3\,\frac{24}{45}$ Kupfertheile. Eine Probe von der Richtigkeit dieser Auflösung ist, daß 16 — $3\,\frac{24}{45} = 12\,\frac{21}{45}$ Theile reines Silber geben, wie vorhin.

§. 33.

Zweyte Art von Fällen der Vermischungsrechnung.

I. Zwey Materien A und C, welche, bey einerley bestimmter Größe, die Preise a und c haben, sollen dergestalt zusammengemischt werden, daß der hieraus entstehende vermischte Körper B, von der nämlichen Größe, einen Mittelpreis b bekömmt, wobey noch angenommen wird, daß b von a und c um gleichviel unterschieden ist. Wie groß ist

die Hergabe eines jeden der beyden zu vermischenden Dinge?

Man nehme von jedem der zu vermischenden Körper gleichviel, d. h. die Hälfte von der Größe des zu findenden Körpers, so entsteht der gesuchte Körper B von der verlangten Größe und vom verlangten Mittelpreise,

Denn nach der Annahme der Aufgabe ist $a - b = b - c$, d. h. der Werth des Körpers A ist um soviel größer, als der von B, um wie viel der Preis von C kleiner, als der von B ist. Hier sind also zwey gleiche Differenzen, folglich auch, nach der Lehre von den Verhältnissen, zwey gleiche arithmetische Verhältnisse d. h. eine arithmetische Proportion. Folglich ist auch $a + c = b + b = 2b$ und $\frac{a + c}{2} = b$, oder $\frac{a}{2} + \frac{c}{2} = b$. Daher entsteht der Mittelpreis, wenn man die Hälfte des höhern und niedern zusammennimmt. Allein von $\frac{1}{2}$ A ist auch der Preis

$\frac{a}{2}$ und von $\frac{1}{2}$ B $= \frac{b}{2}$. Folglich ist die Auflösung richtig.

Beyspiele.

1) Von einem Weine, wovon die Maas 10 Batzen und von einem andern, wovon eine Maas 18 Batzen kostet, soll eine Maas zusammengemischt werden, welche 14 Batzen werth ist. Hier gibt, nach der Auflösung, jede Weingattung eine halbe Maas zum Gemische. Es ist daher auch $\frac{10}{2} + \frac{18}{2} = 5 + 9 = 14$.

2) Von zwey Fruchtgattungen, welche im Malter 7 Gulden und 11 Gulden werth sind, soll ein Malter zusammengemischt werden, welches 9 Gulden werth ist. Weil auch nun wieder die beyden Preise 7 und 11 von dem Mittelpreise 9 gleich weit entfernt sind, indem $9 - 7 = 11 - 9$, so gibt jede Fruchtgattung ein halbes Malter, wodurch das gemischte Mal-

ter einen Werth von $\frac{7}{2} + \frac{11}{2} = \frac{18}{2} = 9$ Gulden bekömmt, wie es die Aufgabe fodert.

3) Sollte der Fall eintreten, daß man, anstatt 1 Maas, irgend eine bestimmte Menge von Maasen zusammenmischen müßte, so ist begreiflich, daß jede Gattung hiezu die Hälfte hergeben muß. Wenn man z. B. aus 12 Batzenwein und aus 18 Batzenwein 25 Maase 15 Batzenwein mischen sollte, so müßte jede Gattung $\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ Maas hergeben. Nun hätte man $\frac{25}{2} \times 12 + \frac{25}{2} \times 18 = 25 \times 6 + 25 \times 9 = 150 + 225 = 375$. Und wirklich ist auch $15 \times 25 = 375$. — Aehnliche Auflösungen haben Statt, wenn andere Dinge auf diese Art vermischt werden sollen.

II. Zwey Körper, A und C, deren Preise bey der nämlichen Größe, a und c sind, wo a größer als c angenommen wird, sollen so vermischt werden, daß daraus ein Körper B von eben der Größe entsteht, der einen Mittelpreis b hat, welcher um ungleichviel von

a und c entfernt ist. Wie groß ist die Hergabe von A und C?

Man suche die Differenzen a — b und b — c, betrachte dieselbe als die Zähler zweyer Brüche, deren Nenner die Summe dieser Differenzen, oder $a - b + b - c = a - c$ ist, so entstehen die Brüche $\frac{a - b}{a - c}$ und $\frac{b - c}{a - c}$. Verwechselt man nun diese Brüche, so ist $\frac{b - c}{a - c}$ die Hergabe des Körpers, A und $\frac{a - b}{a - c}$ jene des Körpers C zur Mischung.

Denn da die Hergabe des Körpers A $= \frac{b - c}{a - c}$, so ist der Werth dieser Hergabe offenbar $= \frac{b - c}{a - c} \times a = \frac{(b - c) \times a}{a - c}$ $= \frac{a \times b - a \times c}{a - c}$, und da die Hergabe des Körpers C $= \frac{a - b}{a - c}$ ist, so wird ihr

Werth in der Vermischung $= \frac{a - b}{a - c} \times c = \frac{a \times c - b \times c}{a - c}$. Folglich ist auch die Summe der beyden Hergaben, oder der Werth des ganzen Gemisches $= \frac{a \times b - a \times c + a \times c - b \times c}{a - c} = \frac{a \times b - b \times c}{a - c} = \frac{(a - c) \times b}{a - c} = b$. Allein der Werth des gemischten Körpers sollte auch nach der Aufgabe $= b$ seyn, so wie die Summe der beyden Hergaben, oder $\frac{b - c}{a - c} + \frac{a - b}{a - c} = \frac{b - c + a - b}{a - c} = \frac{a - c}{a - c} = 1$ seyn mußte. Folglich ist die obige Auflösung richtig.

Beyspiele.

1) Aus zwey Weingattungen, wovon die eine Maas 12 Batzen und die andere 20 Batzen kostet, soll 1 Maas zusammengemischt werden, welche 15 Batzen werth ist. Wieviel muß von jeder genommen werden? — Hier ist

$20 - 15 = 5$, $15 - 12 = 3$, endlich auch $20 - 12 = 8$; folglich die Hergabe des 12 Batzenweines $= \frac{5}{8}$ und jene des 20 Batzenweines $= \frac{3}{8}$. Beyde Werthe erfüllen auch die Foderungen der Aufgabe. Denn der Werth der Summe der Hergaben von beyden Weinen ist $\frac{5}{8} \times 12 + \frac{3}{8} \times 20 = \frac{60}{8} + \frac{60}{8} = \frac{120}{8} = 15$ Batzen und die Summe der Hergaben selbst ist $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$.

2) Wieviel muß von einer Fruchtgattung, wovon das Malter 7 Gulden und von einer andern, von welcher ein Malter 13 Gulden kostet, genommen werden, um ein Malter zu bekommen, welches 9 Gulden werth ist? — Die Unterschiede geben $9 - 7 = 2$, $13 - 9 = 4$ und $13 - 7 = 6$. Daher gibt die wohlfeilere Fruchtgattung $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und die

andere $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Nach diesen Hergaben ist auch wieder $\frac{2}{3} \times 7 + \frac{1}{3} \times 13 = \frac{14}{3} + \frac{13}{3} = \frac{27}{3} = 9$ Gulden. Auch ist $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ Malter.

3) Man soll aus 10löthigem und 15löthigem Silber 12löthiges zusammenmischen. Wieviel muß jede Sorte hergeben, um ein Loth gemischtes Silber zu bekommen? — Die Differenzen geben hier $12 - 10 = 2$, $15 - 12 = 3$ und $15 - 10 = 5$. Daher kommen von dem 10löthigen Silber $\frac{3}{5}$ Lothe und von dem 15löthigen nur $\frac{2}{5}$ Lothe zur Mischung von einem Lothe. Nun geben aber die $\frac{3}{5}$ Lothe vom 10löthigen Silber $\frac{3}{5} \times 10 = \frac{30}{5} = 6$ Theile reines Silber und die $\frac{2}{5}$ vom 15löthigen enthalten $\frac{2}{5} \times 15 = \frac{30}{5} = 6$ Theile

reines Silber. Daher sind in dem gemischten Lothe 6 + 6 oder 12 reine Silbertheile, und dieses gemischte Silber ist 12löthig, wie es die Aufgabe fodert.

4) Wenn der Fall Statt hat, daß man bey diesen Aufgaben irgend eine bestimmte größere Menge des Gemisches und folglich die einzelnen Hergaben hierzu finden sollte, so suche man zuerst die besondern Hergaben für die Einheit des Gemisches und multiplicire jede derselben mit der angegebenen Größe des ganzen Gemisches, so zeigen die beyde Producte die Hergaben zur ganzen Mischung an. Wenn man z. B. in dem I. Beyspiele eine Menge von 80 Maasen Wein zusammenmischen wollte, so würde die Hergabe des 12 Batzenweines $= \frac{5}{8} \times 80 = \frac{400}{8} = 50$ Maase und jene des 20 Batzenweines $= \frac{3}{8} \times 80 = \frac{240}{8} = 30$ Maase seyn. Und hier ist wieder $50 + 30 = 80$, so wie auch $50 \times 12 + 30 \times 20 = 600 + 600 = 1200 = 80 \times 15$ ist.

§. 34.

Begriff der Kettenregel.

Zur Kettenregel gehören jene Aufgaben, wodurch man das unbekannte Verhältniß einer Größe zu einer andern durch mehrere (und oft viele) bekannte Zwischenverhältnisse bestimmen soll. Z. B. man will das Verhältniß des Reichsthalers zur Ducate finden und weiß, daß sich der Reichsthaler zum Kopfstücke wie 9 : 2, das Kopfstück zum Gulden wie 1 : 3 und der Gulden zur Ducate wie 1 : 5 verhalte.

Aus dieser Erklärung folgt:

I. Daß aus dem gegebenen Verhalten bekannter Größen das unbekannte Verhältniß zweyer angegebenen Dingen berechnet werden soll;

II. daß in dem ersten Verhältnisse der ersten Proportion das zweyte Glied das nämliche ist, welches als erstes Glied in dem ersten Verhältnisse der zweyten Proportion steht. Daß ferner das zweyte Glied dieses Ver-

hältnisses wieder als erstes in die folgende Proportion kömmt u. s. w., wodurch nun die beyden Dinge, deren Verhältniß man sucht, als erstes Glied der ersten und als zweytes Glied der letzten Proportion vorkommen. Nämlich:

Rchsthlr.	: Kopfstück	=	9 : 2
Kopfstck.	: Gulden	=	1 : 3
Gulden.	: Ducate	=	1 : 5

§. 35.

Gewöhnliche Auflösung der Kettenregel.

I. Das zu bestimmende Verhältniß sey a : f (wo man sich unter diesen Buchstaben jede mögliche benannte oder unbenannte Zahl vorstellen kann), die gegebenen Zwischenverhältnisse hingegen seyen folgende: 1) a : b = m : n; 2) b : c = o : p; 3) c : d = q : r; 4) d : e = s : t; und 5) e : f = u : v.

II. Man setze diese Verhältnisse so unter einander, daß immer das zweyte Glied des

ersten Verhältnisses das erste Glied des unter ihm stehenden zweyten werde, u. s. f., so erhält man aus I. Folgendes:

$$a : b = m : n$$
$$b : c = o : p$$
$$c : d = q : r$$
$$d : e = s : t \text{ und endlich}$$
$$e : f = u : v$$

III. In diesen Proportionen bilde man die Producte aus allen gleichnamigen Gliedern, so geben dieselbe folgende neue Proportion: $a \times b \times c \times d \times e : b \times c \times d \times e \times f = m \times o \times q \times s \times u : n \times p \times r \times t \times v$.

IV. Das erste Verhältniß dieser Proportion enthält die gemeinschaftlichen Factoren b, c, d und e, welche sich in beyden aufheben. Folglich hat man: $a : f = m \times o \times q \times s \times u : n \times p \times r \times t \times v$, wodurch alle Zwischenglieder in den ersten Verhältnissen der Proportionen in II. hinwegfallen. Allein das letzte Verhältniß ist hier bekannt, weil es aus bekannten Factoren besteht. Folglich ist auch das Verhältniß $a : f$ bestimmt und die Aufgabe aufgelößt.

Beyspiele.

I. Die Aufgabe des vorigen §. wird so aufgelößt, daß man obigen Ansatz bildet, woraus denn nach der Vorschrift der vorigen Auflösung folgt, daß:

Rchsthlr. : Duc. = 9 X 1 X 1 : 2 X 3 X 5 d. h.
Rchsthlr. : Duc. = 9 : 30 = 3 : 10.

II. Wie viele Conventionsthaler kostet 1 Ballen Schreibpapier, wenn sich der Ballen zum Rieß verhält, wie 10 : 1, der Rieß zum Buch wie 20 : 1, das Buch zum Bogen wie 24 : 1, der Bogen zum Heller wie 3 : 1 (das heißt, ein Bogen kostet 3 Heller), der Heller zum Kreuzer wie 1 : 8, der Kreuzer zum Gulden wie 1 : 60 und der Gulden zum Conventionsthaler, wie 1 : 2 $\frac{2}{5}$? — Hier ist der Ansatz dieser:

Ballen	: Rieß	= 10 : 1
Rieß	: Buch	= 20 : 1
Buch	: Bogen	= 24 : 1
Bogen	: Heller	= 3 : 1
Heller	: Kreuzer	= 1 : 8

Kreuzer: Gulden $= 1 : 60$

Gulden: Conv. Thlr. $= 1 : 2\frac{2}{5}$

Ballen : Conv. Thlr. $= (10 \times 20 \times 24 \times 3) : (8 \times 60\, 2\frac{2}{5}) = 200 \times 72 : 480 \times \frac{12}{5} = 200 \times 360 : 480 \times 12 = 7200 : 576 = 12\frac{1}{2} : 1$. Daher kostet 1 Ballen dieses Papiers $12\frac{1}{2}$ Conventionsthaler.

§. 36.

Auflösung der Kettenregel durch den Reesischen Ansatz.

Die zur Kettenregel gehörigen Aufgaben können auch nach dem oben bemerkten Reesischen Ansatze aufgelößt werden, was hier noch zu erläutern ist. Die Frage sey diese: Man kauft in England 224 ℔ Kaffee für $5\frac{3}{4}$ Pfund Sterling. Was kostet 1 baierisches Pfund in baierischem Gelde, da

1 Pf. Sterling mit 11 fl. 17 Kr. einerley ist, und 29 englische Pfunde soviel betragen als 23 baierische Pfunde?

I. Man sieht leicht, daß sich diese Frage folgendergestalt ordnen läßt: Was kostet ein baierisches Pfund in Kreuzern, wenn 23 baierische Pfunde soviel sind als 29 englische Pfunde; wenn 224 englische Pfunde $5\frac{3}{4}$ Pfund Sterling kosten, und wenn 1 Pf. Sterling soviel als 11 Gulden 17 Kr. beträgt.

II. Durch Hülfe der gewöhnlichen Regel Detri läßt sich diese Aufgabe so auflösen, daß man nach und nach folgende drey Fragen beantwortet:

a) Wenn 11 fl. 17 Kr. soviel als 1 Pf. Sterling betragen, wie viele Gulden und Kreutzer geben $5\frac{3}{4}$ Pf. Sterlinge? Dieses vierte Glied heiße X.

b) Wenn X Gulden und Kr. der Preis von 224 englischen Pfunden ist, was werden

29 englische Pfunde kosten? Diesen neuen Preis nenne man y.

c) Wenn 29 englische Pfunde, oder 23 baierische Pfunde y Gulden und Kr. kosten, was ist der Preis von 1 baierischen Pfunde? Dieser heiße z.

III. Bildet man nach den bekannten Regeln diese drey Proportionen, so entsteht folgender Ansatz:

a) 1 Pf. St. : $5\frac{3}{4}$ Pf. St. = 11 fl. 17 Kr. : x.

b) 224 engl. ℔ : 29 engl. ℔ = x : y.

c) 23 baier. ℔ : 1 baier. ℔ = y : z.; oder in reinen Zahlen:

$$1 : 5\frac{3}{4} = 11\frac{17}{60} : x.$$
$$224 : 29 = x : y.$$
$$23 : 1 = y : z,$$ woraus

$$z = \frac{1 \times 29 \times 5\frac{3}{4} \times 11\frac{17}{60}}{23 \times 224 \times 1}$$ wird.

IV. Da man aus der Natur der Aufgabe folgende vier Gleichungen bilden kann: 1 Pf. Sterling = 11 fl. 17 Kr; 224 engl. ℔ = $5\frac{3}{4}$ Pf. Sterl.; 23 baier. ℔ = 29 engl. ℔, und z fl. und Kr. = 1 baier. ℔, so läßt sich hieraus, nach Reesischer Art, folgender Ansatz bilden:

z Guld. und Kr. = 1 baier. ℔.
23 baier. ℔ = 29 engl. ℔.
224 engl. ℔ = $5\frac{3}{4}$ Pf. Sterl.

1 Pf. Sterl. = 11 Guld. 17 Kr.,
welcher auf die gewöhnliche Art so aufgelöset wird, daß man das Product aller Zahlen zur Rechten des Gleichheitszeichens mit dem Producte aus allen Zahlen zur Linken dieses Zeichens dividirt, wodurch z = $\frac{1 \times 29 \times 5\frac{3}{4} \times 11\frac{17}{16}}{23 \times 224 \times 1}$ wird, wie in III.

V. Wird dieser Werth z berechnet, so erhält man z in Kreuzern durch den Ausdruck:

$$x = \frac{29 \times \frac{23}{4} \times 677}{23 \times 224} = \frac{29 \times \frac{1}{4} \times 677}{224} =$$

$$\frac{29 \times 677}{896} = \frac{19633}{896} =$$ 21 Kreutzer, 3 Pfennige und etwas darüber.

VI. Man sieht hieraus, wie die Aufgaben der Kettenregel am Ende auf der gewöhnlichen Regel Detri beruhen und durch sie aufgelöset werden können. Doch gewährt der Kettensatz nach Reesischer Manier eine vorzügliche Bequemlichkeit für das practische Rechnen. Daher sollen hier noch folgende Beyspiele (welche aus der sehr zu empfehlenden Schrift: die Rechenkunst u. s. w. von J. G. Prändel. Amberg 1812, entlehnt sind) zur Uebung in dem Ansatze eine Stelle finden.

§. 37.

Beyspiele zur Anwendung des Reesischen Ansatzes auf die Kettenregel.

I. Ein hiesiger Bankier kauft einen Wech-

selbrief von 12400 Franken. Weil er aber erst nach einigen Monaten zahlbar ist, darf er $2\frac{1}{2}$ fl. von 100 fl. rabattiren, d. h. für jedes 100 fl. nur $97\frac{1}{2}$ fl. bezahlen. Was muß der Käufer für diesen Wechsel in unserem Gelde erlegen, da 80 Franken soviel als 81 Livres und 24 Livres soviel als 11 Gulden getragen? — Der Ansatz wird dieser:

X fl. mit Rabatt	12400 Franken.
80 Frank	81 Livres.
24 Livres	11 Gulden
100 Gulden	97 1/2 Guld. mit Rabatt.

Werden nun die Glieder zur Rechten und zur Linken des Senkstrichs gehoben, so findet man X = 5610 Gulden, 30 Kr., $3\frac{3}{4}$ Pf.

II. Der große Solnstein, einer der höchsten Berge Tyrols, mißt bis zu seinem Gipfel $1584\frac{1}{3}$ pariser Toisen. Was beträgt diese Höhe nach baierischem Maase, da 1

Toise so groß ist, als 6 pariser Fuß und 1 pariser Fuß 129 $\frac{19}{100}$ baierische Linien enthält, deren 144 einen baierischen Fuß betragen? Nennt man die zu findenden baierischen Fuße X, so ist der Ansatz dieser:

$$X \text{ baier. Schuhe} = 1584 \frac{1}{3} \text{ Toisen.}$$

$$1 \text{ Toise} = 6 \text{ paris. Schuhe.}$$

$$1 \text{ par. Sch.} = 129 \frac{19}{100} \text{ baier. Linien.}$$

$$144 \text{ baier. Lin.} = 1 \text{ baierischer Schuh.}$$

Wird diese Rechnung durchgeführt, so erhält man $X = 8528 \frac{1}{3}$ baierische Schuhe.

III. Ein Amberger Wechselhaus hatte Gelegenheit, hannöverische Scheidemünze, die man Rössel nennt, einzuwechseln, und dieselbe wieder an Ort und Stelle zu senden. Was gewann es an 100 fl., da es für 1 Rössel $7 \frac{1}{2}$ Kreuzer gab und in Hannover für 4 Rössel 1 Frank und 6 Sols bekam? Bekanntlich be-

tragen 80 Franken soviel als 81 Livres, 24 Livres machen 11 Gulden und 20 Sols gehen auf 1 Franken.

Nennt man den zu suchenden Gewinn an 1 Gulden X, so ist der Ansatz dieser:

X Gulden	=	100	Guld. Auslage.
1 Gulden	=	60	Kreuzer.
$7\frac{1}{2}$ Kreuz.	=	1	Rössel.
4 Rössel	=	1	Frank 6 Sols.
20 Sols	=	1	Frank.
80 Franken	=	81	Livres.
24 Livres	=	11	Gulden.

Das Resultat der ausgeführten Rechnung gibt $X = 120\frac{21}{32}$ Gulden, folglich ist $20\frac{21}{32}$ der gesuchte Procentgewinn.

IV. Um in Wechselgeschäften das Steigen und Fallen des Geldes auf den drey vornehmsten Handelsplätzen: Hamburg, Amsterdam und Venedig sicherer beurtheilen zu können, haben die Augsburger Kaufleute den sogenannten Girofuß eingeführt, nach

welchem 100 Reichsthaler Girogeld durchgehends 127 Reichsthaler Currentgeld (20 Guldenfuß) ausmachen. Nun sollen nach Hamburg zu einer Zeit, wo 100 Reichsthaler dortiges Bankgeld 116 $\frac{1}{8}$ Reichsthaler Girogeld werth sind, eine Summe von 2490 Reichsthaler bezahlt werden. Wieviel Gulden rheinisch hat man dazu nöthig? Bekanntlich wird 1 Reichsthaler zu 1 $\frac{1}{2}$ Current und 5 fl. Current werden zu 6 fl. rheinisch gerechnet. Hier ist der Ansatz:

X fl. rheinisch	=	2490 Rthlr. Bankg.
100 Rthlr. Bankg.	=	116 $\frac{1}{8}$ Rthlr. Girog.
100 Rthlr. Girog	=	127 Rthlr. Curr.
1 Rthlr. Curr.	=	1 $\frac{1}{2}$ Guld. Curr.
5 Guld. Curr.	=	6 Guld. rheinisch.

Als Resultat der durchgeführten Rechnung ergibt es sich, daß die 2490 Rthlr. Bankgeld soviel als 6609 Guld. 59 Kr. 3 $\frac{209}{500}$ rheinisch betragen.

In der bis hierher entwickelten Theorie der Proportionsrechnungen ist der Grund der so höchst manchfaltigen practischen Anwendung dieser nützlichen Lehre enthalten. Wenn es das Bedürfniß des Schülers erfodert, so kann dieses Practische leicht weiter ausgeführt werden.

§. 38.

Begriff und Arten der Progressionen.

Eine Reihe von Zahlen, deren jede nach dem nämlichen Gesetze größer oder kleiner ist, als die unmittelbar vorhergehende, heißt eine Progression; z. B. die Reihe 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19; oder 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2; oder 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128; oder 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ u. s. w. Die Progression heißt eine steigende, wenn die folgenden Glieder größer, eine fallende aber, wenn diese Glieder immer kleiner werden. In obigen Beyspielen ist die

erste und dritte Progression eine steigende, die zweyte und vierte eine fallende.

Sowohl die steigende als die fallende Progression ist entweder eine arithmetische oder geometrische; je nachdem die folgenden Glieder entweder um die nämliche Zahl größer oder kleiner werden, oder gleichvielmal größer oder kleiner, als die ihnen unmittelbar vorhergehenden sind. Das erste und zweyte Beyspiel stellt eine arithmetische, das dritte und vierte eine geometrische Progression dar.

Aus diesen Erklärungen folgt, daß jede arithmetische Progression aus gleichen arithmetischen Verhältnissen und aus arithmetischen stetigen Proportionen bestehe. Die Reihe: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 u. s. w. enthält die gleichen arithmetischen Verhältnisse: 1 — 3, 3 — 5, 5 — 7, 7 — 9 u. s. w.; auch die stetigen Proportionen: 1 — 3 = 3 — 5; 3 — 5 = 5 — 7 u. s. w.

Desgleichen lassen sich aus jeder geometrischen Progression sowohl gleiche, als auch stetige geometrische Proportionen bilden. Z. B. die Reihe

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, u. s. w. gibt die gleichen Verhältnisse: 1 : 2, 2 : 4, 4 : 8, 8 : 16 u. s. w.; auch die stetigen Proportionen: 1 : 2 = 2 : 4; 2 : 4 = 4 : 8; 4 : 8 = 8 : 16 u. s. w.

Aus diesen Gründen bezeichnet man die arithmetischen Progressionen mit dem Zeichen des arithmetischen, die geometrischen Progressionen aber mit jenem des geometrischen Verhältnisses; z. B. 4 — 7 — 10 — 13 — 16 — 19 — 22 u. s. w. stellt eine arithmetische Progression, und 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 u. s. w. eine geometrische Progression dar.

Zuerst soll das Wichtigste von jenen, sodann von diesen vorgetragen werden.

§. 39.

Allgemeiner Ausdruck der arithmetischen Progression. Beweis von $u = a + (n - 1)d$.

Wenn man das erste Glied einer arithmetischen Progression a, den Unterschied ihrer Glieder d nennt, so stellt:

a — (a + d) — (a + 2d) — (a + 3d) — (a + 4d) — (a + 5d) . . . . . den Anfang einer arithmetischen Progression im Allgemeinen dar, deren erstes Glied a, das sechste a + 5d ist. Auch ist diese Reihe, von a angefangen, eine steigende; setzte man sie rückwärts fort, so würde sie, von a gerechnet, eine fallende. Daher ist das allgemeine Bild der arithmetischen Progression Folgendes:

$$\overset{\text{ntes}}{(a - nd)} \;.\,.\,.\,.\,.\; \overset{\text{4tes}}{(a - 3d)} — \overset{\text{3tes}}{(a - 2d)} — \overset{\text{2tes}}{(a - d)} — \overset{\text{1tes}}{a} — \overset{\text{2tes}}{(a + d)} — \overset{\text{3tes}}{(a + 2d)} — \overset{\text{4tes}}{a + 3d)} \;.\,.\,.\,.\,.\; — \overset{\text{ntes Glied.}}{(a + nd)}$$

woraus man sieht, daß diese Reihe zur Rechten von a eine steigende, zur Linken aber eine fallende ist. Nimmt man aber a — nd zum ersten Gliede an, so ist sie durchaus eine steigende; nähme man aber a + nd als erstes Glied, und läse sie rückwärts, so wäre sie durchaus eine fallende.

Aus der Natur dieser Progressionen folgt:

1) daß das Gesetz der ganzen Reihe bestimmt ist, wenn man das erste und zweyte Glied kennt.

2) Daß man auch die Größe jedes Gliedes dieser Reihe bestimmen kann, sobald man nur weiß, das wievielte es ist. Denn das zweyte Glied besteht aus dem ersten und der einfachen Differenz; das 3te aus dem ersten und der 2fachen Differenz; somit das 10te aus dem ersten und der 9fachen Differenz; oder allgemein das nte Glied aus dem ersten und der (n — 1) fachen Differenz.

3) Nennt man das letzte Glied u, so ist nunmehr klar, daß $u = a + (n - 1)d$ sey. Wäre z. B. $a = 6$, $n = 10$ und $d = 3$, so würde $u = 6 + (10 - 1) \times 3 = 6 + 9 \times 3 = 6 + 27 = 43$, wie man sich leicht durch Entwickelung der Glieder dieser Reihe überzeugen kann. Das hunderte Glied dieser Reihe würde $= 6 + (100 - 1) \times 3$ seyn u. s. w.

§. 40.

Ableitung der Werthe von a, n und d.

1) Da nach dem vorigen §.
u = a + (n — 1) d ist, so subtrahire man
(n — 1) d = (n — 1) d, so erhält man
zum Reste

u — (n — 1) d = a das heißt: man findet das erste Glied der Progression, wenn man vom letzten Gliede das Product aus der Differenz in die um 1 verminderte Gliederzahl abzieht. Die Progression sey 4 — 7 — 10 — 13 — 16 — 19 — 22 — 25, so ist a = 25 — (8 — 1) X 3 = 25 — 7 X 3 = 25 — 21 = 4, oder dem ersten Gliede.

2) Aus u = a + (n — 1) d folgt durch die Multiplication mit d, daß u = a + nd — d, und, indem man beyderseits a subtrahirt, u — a = nd — d, woraus, durch beyderseitige Addition von d, der Ausdruck u — a + d = nd, und endlich, durch beyderseitige Division mit d, der Werth von n =

$\frac{u - a + d}{d} = \frac{u - a}{d} + 1$ wird. Man findet daher die Zahl der Glieder, wenn man die Differenz vom letzten und ersten Gliede durch den Unterschied der Glieder dividirt und zu diesem Quotienten 1 addirt. In obigem Beyspiele ist daher $n = \frac{25 + 4}{3} + 1 = \frac{21}{3} + 1 = 7 + 1 = 8$, der obigen Gliederzahl.

3) Aus $u = a + (n - 1)d$ folgt ferner, durch beyderseitiges Abziehen von a, daß $u - a = (n - 1)d$, und, durch beyderseitiges Dividiren mit $n - 1$, wird $\frac{u - a}{n - 1} = d$ d. h. man findet die Differenz der Progression, wenn man den Unterschied vom ersten und letzten Gliede durch die Zahl der Glieder weniger eins dividirt. So ist oben $d = \frac{25 - 4}{8 - 1} = \frac{21}{7} = 3$ oder der Differenz.

§. 41.

Die Summe aller Glieder zu finden. Bestimmung von a, u, n durch s.

I. Wenn man die Progression

$$\overset{1}{a} — (a \overset{2}{+} d) — (a \overset{3}{+} 2d) — (a \overset{4}{+} 3d) — (a \overset{5}{+} 4d) — (a \overset{6}{+} 5d) — (a \overset{7}{+} 6d) — (a \overset{8}{+} 7d) \ldots$$

betrachtet, so ist klar, daß das 2te Glied um d größer ist, als das 1te, das 7te Glied dagegen ist um d kleiner als das 8te. Da nun jedes Glied der Reihe das 1te Glied enthält, so müssen gleiche Summen entstehen, wenn man das 1te Glied zum 8ten, und wenn man das zweyte Glied zum 7ten addirt. Jene Summe ist $= a + a + 7d = 2a + 7d$; diese aber wird $= a + d + a + 6d = 2a + 7d$, wie vorhin. Auf gleiche Weise wird das 3te und 6te und auch das 4te und 5te Glied zusammen addirt, gleiche Summe geben, da $a + 2d + a + 5d = a + 3d + a + 4d = 2a + 7d$ ist.

Daher findet man in obiger Progression die Summe aller Glieder, wenn man das 1te Glied zum letzten addirt, und diese Summe durch die halbe Zahl aller Glieder multiplicirt. Nennt man diese Summe s, so wird $s = (a + a + 7d) \times 4 = (2a + 7d) \times 4 = 8a + 28d$, wie man auch wirklich findet, wenn man alle a und alle d zusammen addirt.

II. Bestände die Progression aus einer ungeraden Anzahl von Gliedern, z. B. a — (a + d) — (a + 2d) — (a + 3d) — (a + 4d) — (a + 5d) — (a + 6d), so sind die Glieder zwar nicht Paarweise vorhanden; allein das mittlere Glied (hier das 4te Glied) doppelt genommen ist der Summe vom 1ten und 7ten, vom 2ten und 6ten, vom 3ten und 5ten gleich. Daher findet man auch hier die Summe aller Glieder, wenn man das 1te zum letzten addirt, und diese Summe mit der halben Gliederzahl dividirt. Dies gibt $s = (a + a + 6d) \times \frac{7}{2} = (2a + 6d) \times \frac{7}{2} = \frac{14a + 42d}{2} = 7a - 21d$, wie man

auch durch wirkliche Addition aller a und aller d findet.

III. Hieraus folgt, daß der allgemeine Ausdruck für die Summe aller Glieder in der arithmetischen Progression folgender ist: $s = (a + u) \frac{n}{2}$, d. h. man findet diese Summe, wenn das erste Glied zum letzten Gliede addirt und dieses Ganze mit der halben Zahl der Glieder multiplicirt wird. Die Progression sey 1 — 4 — 7 — 10 — 13 — 16 — 19 — 22 — 25; so wird $s = (1 + 25) \times \frac{9}{2} = \frac{26 \times 9}{2} = 13 \times 9 = 117$ u. s. w.

IV. Aus der Formel $s = (a + u) \frac{n}{2}$ folgt, durch beyderseitige Multiplication mit 2, daß $2s = (a + u) n$, und, durch beyderseitige Division mit $a + u$, daß $n = \frac{2s}{a + u}$ sey, d. h. die Zahl der Glieder wird gefunden, wenn man die doppelte Summe aller Glieder mit der Summe aus dem ersten und letzten

Gliede dividirt. In obigem Beyspiele ist $n = \frac{2 \times 117}{1 + 25} = \frac{234}{26} = 9$.

V. Aus der Formel $2s = (a + u)n$ (in IV.) folgt, durch beyderseitige Division mit n, daß $\frac{2s}{n} = a + u$; folglich, durch beyderseitiges Abziehen von a, das letzte Glied $u = \frac{2s}{n} - a$ sey; d. h. man findet das letzte Glied, wenn von dem Quotienten aus der Gliederzahl in die doppelte Summe der Progression das erste Glied abgezogen wird. In obigem Beyspiele wird daher $u = \frac{2 \times 117}{9} - 1 = \frac{234}{9} - 1 = 26 - 1 = 25$.

VI. Aus der Formel $\frac{2s}{n} - a = u$ (in V.) folgt, durch beyderseitiges Addiren von a und Subtrahiren von u, daß $a = \frac{2s}{n} - u$, oder das erste Glied wird gefunden, wenn man von dem Quotienten aus der Glieder-

zahl in die doppelte Summe das letzte Glied abzieht. Nach obigem Beyspiele wird $a = \frac{2 \times 117}{9} - 25 = \frac{234}{9} - 25 = 26 - 25 = 1.$

§. 42.

Einige Anwendungen von der Summirung dieser Progressionen.

I. Man soll die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n finden. Es ist klar, daß die einfachen Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. eine arithmetische Reihe bilden, deren Unterschied $= 1$, und worin das nte Glied selbst $= n$ ist. Daher wird $s = (1 + n)\frac{n}{2} = \frac{n + n^2}{2}$

d. h. die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n ist der halben Summe, aus n und dem Quadrate von n, gleich. Sollte man die Summe der ersten 50 Zahlen finden, so wäre $n = \frac{50 + 2500}{2} = \frac{2550}{2} = 1275$ u. s. w.

II. Die Summe aller ungeraden Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Differenz $= 2$ und deren Gliederzahl n ist. Um die Größe dieses nten Gliedes zu finden, dient die Formel $u = a + (n - 1) d = 1 + (n - 1) \times 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$. Setzt man diesen Werth von u in die Formel $s = (a + u) \frac{n}{2}$, so wird $s = (1 + 2n - 1) \times \frac{n}{2} = 2n \times \frac{n}{2} = n^2$. Daher ist z. B. die Summe von $1 + 3 + 5 + 7 \ldots + 25 = 25 \times 25 = 725$ u. s. w.

Zur fernern Erläuterung mögen folgende Beyspiele dienen, deren Auflösung dem Anfänger nicht schwer fallen wird.

III. Ein Körper ist während n Secunden gefallen; in der ersten Secunde durchlief er einen Raum von 15,625 rheinländischen Fußen, in der 2ten Secunde legte er das Dreyfache, in der dritten das Fünffache dieses Raumes zurück u. s. w. Wie groß war seine Fallhöhe am Ende der nten Secunde?

V. Ein Brunnen ist 30 Ellen tief; für die erste Elle zu graben gab man 20 Kr.; für jede folgende 10 Kr. mehr. Wieviel für alle?

V. Auf einem dreyeckig zugespitzten Dache befinden sich 25 Reihen von Ziegeln unter einander; oben liegt 1, dann 3, dann 5 u. s. w. Wie viele Ziegeln befinden sich auf dem ganzen Dache?

§. 43.

Allgemeiner Ausdruck der geometrischen Progression.

Wenn man das erste Glied der geometrischen Progression a, den Exponenten aber e nennt, so ist ihr allgemeiner Ausdruck dieser: $a : ae : ae^2 : ae^3 : ae^4 : ae^5 \ldots ae^n$ oder in Zahlen 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 u. s. w.

Setzte man diese Progression rückwärts fort, so entstände diese fallende Reihe:

$$a : \frac{a}{e} : \frac{a}{e^2} : \frac{a}{e^3} : \frac{a}{e^4} : \frac{a}{e^5} \ldots \frac{a}{e^n} \text{ u. s. w.}$$

Aus der Natur dieser Progression folgt:

I. daß das Gesetz derselben gegeben ist, wenn man das erste Glied und den Exponenten, oder das 1te und das 2te Glied kennt.

II. Daß man jede geometrische Progression in eine andere verwandeln kann, deren erstes Glied = 1, jedes folgende aber eine Potenz ihres Exponenten ist. So kann man aus den so eben angeführten beyden Progressionen durch Division aller Glieder mit a, folgende beyde Reihen bilden:

$1 : e : e^2 : e^3 : e^4 : e^5 : e^6$ u. s. w. und dann $1 : \frac{1}{e} : \frac{1}{e^2} : \frac{1}{e^3} : \frac{1}{e^4} : \frac{1}{e^5} : \frac{1}{e^6}$ u. s. w.

III. Daß man die Größe jedes Gliedes der geometrischen Reihe bestimmen könne, sobald man das 1te Glied, den Exponenten und die Zahl dieses Gliedes kennt. Denn jedes Glied ist ein Product aus dem 1ten Gliede u. eine Potenz des Exponenten; so zwar, daß das dritte Glied den Exponenten auf der 2ten, das 4te Glied den Exponenten auf der 3ten, das 5te Glied denselben auf der 4ten Potenz

u. s. w. als Factor enthält. Wäre das erste Glied = 2, der Exponent = 3, so müßte das 10te Glied dieser Reihe = $2 \times 3^{10-1}$ = 2×3^{9} seyn.

§. 44.

Beweis von $u = a \times e^{n-1}$. Bestimmung von e und a.

I. Wenn man das nte Glied einer geometrischen Progression, deren erstes = a und deren Exponent = e ist, u nennt, so ist aus dem vorigen §. klar, daß $u = a \times e^{n-1}$ ist, wie man auch sehr leicht durch Beyspiele erläutern kann.

II. Aus $u = a \times e^{n-1}$ folgt, daß $a = \frac{u}{e^{n-1}}$ ist; d. h. man findet das 1te Glied, wenn man das letzte durch eine Potenz des Exponenten dividirt, welcher um einen Grad niedriger ist, als die Zahl aller Glieder.

III. Aus der Formel $u = a \times e^{n-1}$ folgt auch, durch beyderseitige Division mit a, daß $\frac{u}{a} = e^{n-1}$; folglich, durch das beyderseitige Ausziehen der n — 1ten Wurzel, auch $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ sey.

§. 45.

Summirung aller Glieder der geometrischen Progression.

Um die Summe aller Glieder der geometrischen Reihe zu finden, bemerke man Folgendes. Wenn man diese zu findende Summe s nennt, so wird $s = a + ae + ae^2 + ae^3 \ldots\ldots + ae^{n-1}$ folglich, mit e multiplicirt, $es = ae + ae^2 + ae^3 \ldots\ldots + ae^{n-1} + ae^n$ und durch Subtraction, $es - s = ae^n - a$, d. h. $(e - 1)s = ae^n - a$; folglich, durch beyderseitige Division mit $e - 1$

wird $s = \frac{ae^n - a}{e - 1}$, oder $s = \frac{e^n - 1}{e - 1} \times a$.

In der Formel $s = \frac{ae^n - 1}{e - 1}$ ist die Größe ae^n jenes Glied der obigen Reihe, welches unmittelbar auf das letzte ae^{n-1} folget. Daher entsteht folgende Regel zur Summirung einer gegebenen geometrischen Reihe: Man berechne jenes Glied, welches auf das letzte zunächst folgen würde, subtrahire von ihm das 1te Glied und dividire die Differenz durch den um 1 verminderten Exponenten. Es sey z. B. die zu summirende Reihe folgende:

1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187, so wird ihre Summe $= \frac{3 \times 2187 - 1}{3 - 1} = \frac{6561 - 1}{2} = \frac{6560}{2}$ 3280, wie man auch durch das unmittelbare Summiren finden kann.

§. 46.

Begriff und Summirung der unendlichen Reihen.

Man nennt unendliche Reihen diejenigen, welche in ihren folgenden Gliedern immer kleiner werden und deren Gliederzahl ins Unendliche fortläuft. Z. B:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ ... ohne Ende, oder

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ ... ohne Ende.

Um die Summe ihrer Glieder zu finden bemerke man Folgendes:

Wenn der Exponent e ein ächter Bruch ist, so werden die folgenden Glieder der Reihe immer kleiner und kleiner, und wenn die Gliederzahl, oder n, unendlich groß ist, so kann man annehmen, daß $e^n = 0$ sey. Dies gibt aus der Formel $s = \frac{e^n - 1}{e - 1} \times a$ soviel

als $s = \frac{-1}{e-1} \times a = \frac{-a}{e-1}$, oder, wenn man den Zähler und Nenner dieses Bruchs mit -1 multiplicirt, $s = \frac{a}{1-e}$.

Berechnet man nach dieser Formel die hier folgenden Reihen, so wird

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \ldots\ldots = 1,$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} \ldots\ldots = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \ldots\ldots = \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} \ldots\ldots = \frac{1}{4} \text{ und}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} \ldots\ldots = (\frac{1}{n-1}$$

Die Allgemeinheit und Richtigkeit der zuletzt stehenden Reihe kann dadurch sehr erläutert werden, wenn man den Zähler des Bruchs

$\frac{1}{n-1}$ durch seinen Nenner wirklich dividirt, wodurch man obige unendliche Bruchreihe erhält. Dergleichen Uebungen sind für Anfänger sehr lehrreich. Nämlich:

Divis.	Divid	Quotient.
$n-1$	1	$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ u. s. w.

$$1 - \frac{1}{n}$$

$$+\frac{1}{n}$$

$$+\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

$$+\frac{1}{n^2}$$

$$+\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$$

$$+\frac{1}{n^3} \text{ u. s. w.}$$

Achtes Buch.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 1.

Bestimmung einiger Vorbegriffe.

Was man unter Potenz und Wurzel versteht, ist bereits oben (im VI. B.) erklärt worden. Da hier die Lehre von der Ausziehung der Quadratwurzeln vorgetragen werden soll, so müssen vor Allem die Ausdrücke: Quadrat, Quadratwurzel, Quadratwurzelausziehen erläutert werden. Das Product aus einer Zahl in sich selbst, heißt das Quadrat dieser Zahl, und die Zahl, welche zweymal als Factor vorkömmt, wird

die Quadratwurzel genennt. So ist 64 das Quadrat von 8, und 8 die Quadratwurzel von 64; desgleichen a^2 das Quadrat von a, und a die Quadratwurzel von a^2. Desgleichen ist von $\frac{2}{3}$ das Quadrat $\frac{4}{9}$, von $\frac{3}{5}$ aber $\frac{9}{25}$ und jene Brüche sind von diesen Quadraten die Wurzeln. Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel finden, heißt eine Zahl suchen, welche einmal mit sich selbst multiplicirt jene Zahl hervorbringt. So findet man z. B. aus 144 die Zahl 12 als Quadratwurzel, weil $12 \times 12 = 144$. Das willkührliche Zeichen zur Ausziehung der Quadratwurzel ist dieses $\surd$, und $\surd 49 = 7$, weil $7 \times 7 = 49$. Auch heißt z. B. $\surd 3864$ soviel, als eine Zahl suchen, welche einmal mit sich selbst multiplicirt, die gegebene 3864 hervorbringt.

Die Wurzel heißt eintheilig, wenn sie aus einem blosen Einer; zweytheilig,

wenn sie aus einem Einer und Zehner; dreytheilig, wenn sie aus einem Hunderter, Zehner und Einer, und überhaupt vieltheilig, wenn sie aus noch höhern Stellen besteht. So ist 6, 8, a, b eine eintheilige; 26, 84, a + b eine zweytheilige; 384, 576, a + b + c eine dreytheilige Wurzel u. s. w. Man nennt die höchste Ziffer dieser Wurzeln den ersten Theil, die nächst niedrigere Ziffer ihren zweyten Theil u. s. f.

§. 2.

Angabe der Theile des Quadrates der ein- und zweytheiligen Wurzeln.

I. Die eintheiligen Wurzeln sind die einfachen Zahlen von 1—9, und ihre Quadrate entweder blose Einer, oder Einer und Zehner. Denn die Quadrate von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sind in eben dieser Ordnung 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 und 81. Daher muß die Wurzel jedes Quadrates, welches aus einer oder zwey Ziffern besteht, eintheilig seyn.

II. Das Quadrat jeder zweytheiligen Wurzel besteht aus drey Stücken:

a) aus dem Quadrate des Zehners, oder des ersten Theils;

b) aus dem zweyfachen Producte des Zehners in den Einer, oder des ersten Theils in den zweyten, und

c) aus dem Quadrate des Einers oder des zweyten Theils.

Da man sich unter a + b jede zweytheilige Wurzel denken kann, so darf man nur a + b mit sich selbst multipliciren, um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen. Nämlich

I. Th. II. Th.

$$\left.\begin{matrix} a + b \\ a + b \end{matrix}\right\}$$ multiplicirt.

---

a^2 oder Quadrat des I. Theils.
+ ab oder Product des I. Th. in den II. Th.
+ ab oder Product des I. Th. in den II. Th.
+ b^2 oder Quadrat des II. Theils.

$a^2 + 2ab + b^2$, welches die obenbemerkten 3 Stücke sind.

Aus dieser einfachen Rechnung erkennt man schon den großen Werth der Buchstaben, da das erhaltene Resultat ganz allgemein seyn und von dem Quadrate jeder zweytheiligen Wurzel gelten muß.

In Zahlen sey diese Wurzel z. B. 48 = 40 + 8, wobey 40 der I., und 8 der II. Wurzeltheil ist. Die Rechnung wäre nun diese:

I. Th. II. Th.
40 + 8
40 + 8

1600 = 40^2 = dem Quadrate des I. Theils
320 = 40 X 8 = dem Prod. des I. Th. in den II. Th.
320 = 40 X 8 = dem Prod. des I. Th. in den II. Th.
64 = 8^2 = dem Quadr. des II. Theils.

2304 = $40^2 + 2 \times (40 \times 8) + 8^2 = 48^2$, und dieses Quadrat enthält wirklich die in dem Lehrsatze benannten Stücke. Die gewöhnliche Rechnung gibt Folgendes:

$$\begin{array}{r} 48 \\ 48 \\ \hline 384 \\ 192 \\ \hline 2304 \end{array} = 48^2 \text{ wie oben.}$$

§. 3.

Folgerungen hieraus.

I. Das Quadrat des I. Theils ist das Product eines Zehners in einen Zehner, und hat daher seine niedrigste Stelle in den Hunderten. Da nun der I. Wurzeltheil nicht größer als 90 seyn kann, so wird dessen Quadrat höchstens 8100 betragen und folglich seine höchste Stelle in den Tausenden haben können.

II. Da das doppelte Product aus einem Zehner in einen Einer entsteht, so muß es seine niedrigste Stelle in den Zehnern haben. Es wird am Größten, wenn die Wurzel 99 = 90 + 9 ist, in welchem Falle dasselbe 1620 beträgt, folglich mit seiner höchsten Ziffer in die Tausende reichet.

III. Das Quadrat des II. Theils ist das Product eines Einers in einem Einer, hat demnach seine niedrigste Stelle in den Einern und kann seine höchste in den Zehnern haben.

IV. Das Quadrat der größten zweytheiligen Wurzel, oder 99^2 gibt 9801, eine Zahl von 4 Ziffern. Das Quadrat der kleinsten zweytheiligen Wurzel aber, oder $10^2 = 100$, die kleinste Zahl von 3 Ziffern. Folglich hat jede drey- oder vierzifferige Zahl eine zweytheilige Quadratwurzel. Wenn man daher eine drey- oder vierzifferige Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Classen, jede zu zwey Ziffer, eintheilt, so hat ihre Quadratwurzel so viele Theile, als es Classen sind, wenn gleich die linke Classe nur eine Ziffer enthält. Wären die Quadratzahlen 6324 oder 864, so ständen sie nach dieser Abtheilung so: 63 | 24 und 8 | 64.

V. In der niedrigsten Ziffer der rechten Classe fängt das Quadrat des II. Theils der

Wurzel, und in ihrer höchsten das doppelte Product aus dem I. in den II. Theil an. Aber in der niedrigsten Ziffer der linken Classe hat das Quadrat des I. Theils seinen Anfang. Alles dieses erhellet aus I. — IV.

§. 4.

Bestimmung der Quadratwurzeln aus drey- oder vierzifferigen Zahlen.

Um aus einer drey oder vierzifferigen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen, theile man dieselbe

I. von der Rechten zur Linken in Classen, wodurch man zwey Classen, und folglich zwey Wurzeltheile erhält.

II. Man suche in dem Einmaleins sein Quadrat, welches das größte ist, das von der linken Classe abgezogen werden kann und ziehe es wirklich davon ab. Die Wur-

zel dieses Quadrates ist der I. Theil der zu findenden Wurzel, welchen man zur Rechten neben einen Absönderungsstrich anschreibt.

III. Wenn in II. ein Rest bleibt, so ist dieser Dasjenige, was das doppelte Product in die linke Classe gebracht hat. Man nehme zu diesem Reste die nächstfolgende Ziffer der Quadratzahl herunter, so muß in diesen Ziffern das doppelte Product aus dem I. Theile in den II. Theil enthalten seyn.

IV. Man verdoppele nunmehr den I. Wurzeltheil, dividire damit die Zahl in III., so ist der Quotient der II. Theil der Wurzel. Denn jene Zahl enthält das doppelte Product oder 2ab, dividirt man daher mit 2a in diese 2ab, so erscheinet b als II. Wurzeltheil. Diesen multiplicire man mit dem Divisor und ziehe das Product vom Dividenden ab.

V. Setzt man neben den etwaigen Rest in IV. die letzte Ziffer der Quadratzahl, so wird in diesen Ziffern das Quadrat des II. Theils enthalten seyn. Erhebt man daher

diesen II. Theil zum Quadrate, so ist dasselbe entweder eben so groß als die Zahl, wovon es abgezogen werden soll, oder es ist größer, oder kleiner als dieselbe. Im ersten Falle ist die angegebene Zahl ein vollkommenes Quadrat und die gefundene Wurzel ihre genaue Quadratwurzel.

VI. Im zweyten Falle von V. muß man den Quotienten in IV. um eine Einheit verringern, dann wieder nach IV. und V. verfahren, bis das Quadrat des II. Theils von der Zahl in V. abgezogen werden kann. — Im dritten Falle von V. ist dies ein Beweis, daß die gefundene Wurzel jene sey, deren Quadrat der gegebenen Zahl am nächsten kömmt, und der gebliebene Rest zeigt an, um wieviel diese Zahl größer als das Quadrat der gefundenen Wurzel ist. Wenn man daher diese Wurzel quadrirt und den Rest dazu addirt, so muß die erst gegebene Zahl herauskommen.

Diese Vorschriften werden durch nachfolgende Beyspiele hinlänglich aufgeklärt werden.

Beyspiele.

I. II.

I. $\sqrt{}$ 5 | 76 (2 4 Wurzeltheile

Quad. des I. Th. 4
das doppelte Prod.
steckt in . . 17
der dopp. I. Wurzel-
theil . . . (4)
das dopp. Prod. 16
16
Quad. des II. Th. 16
00

Daher ist $\sqrt{}$ 576 = 24. Die Probe darüber ist, daß 24 X 24 = 576 gibt.

I. II.

II. $\sqrt{}$ 14 | 44 (3 8 Wurzeltheile.

9 Quadrat des I. Theils.
54
(6) der dopp. I. Theil.
48 das doppelte Prod. aus I. in II.
64
64 Quadrat des II. Theils.
00

Hier tritt der Fall ein, daß der Divisor 6 in seinem Dividenden 54 eigentlich neunmal enthalten ist. Das doppelte Prod. würde dann 54 und es bliebe kein Rest. Nun käme die letzte 4 herunter, wovon 9 X 9 = 81 abgezogen werden sollte, welches nicht seyn kann. Da aber das Quadrat des II. Theils doch noch in der gegebenen Quadratzahl enthalten ist, so muß der II. Theil = 8 genommen werden. Die Probe gibt wieder 38 X 38 = 1444.

I. II.

III. √ 35 ¦ 68 (5 9 Wurzeltheile.

25	Probe	
106	59	multiplicirt.
(10)	59	
90	531	
168	295	
81	3481 = 59^2	
87 Rest.	87 Rest addirt.	
	3568	

I. II.

IV. √ 85 | 96 (9 2 Wurzeltheile.

81	Probe.
49	92
(18)	92
36	184
136	828
4	8464
132 Rest.	132 Rest addirt
	gibt 8596

§. 5.

Bestimmung der Theile des Quadrates mehrtheiliger Wurzeln.

Um die Theile zu bestimmen, woraus die Quadrate drey, und mehrtheiliger Wurzeln bestehen, bemerke man Folgendes:

I. Für die dreytheilige Wurzel $p + q + r$ setze man $p + q = a$ und $r = b$, so wird $(p + q + r)^2 = (a + b)^2$. Allein $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; daher wird hier $a^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$, $2ab = 2(p + q) \times r$ und $b^2 = r^2$. Folglich $(p + q + r)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + 2(p + q)r + r^2$. Will man diese Stücke mit Worten nennen, so heißt dieses soviel: das Quadrat einer dreytheiligen Wurzel enthält folgende fünf Stücke, nämlich:

1) das Quadrat des I. Theils,

2) das doppelte Product vom I. Theile in den II. Theil,

3) das Quadrat des II. Theils,

4) das doppelte Product aus dem I. und II. Theile in den III. Theil und

5) das Quadrat des III. Theils.

In Zahlen sey z. B. die dreytheilige Wurzel 865, worin $800 = p$, $60 = q$ und $5 = r$ seyn kann. Hier ist

$p^2 = 800 \times 800 =$ 640000
$2pq = 1600 \times 60 =$ 96000
$q^2 = 60 \times 60 =$ 3600
$2(p+q)r = 2 \times (800+60) \times 5 = 8600$
$r^2 = 5 \times 5 =$ 25

Folglich $865^2 =$ 748225

II. Soll man die Theile finden, woraus das Quadrat einer vierzifferigen Wurzel besteht, so sey dieselbe $= p + q + r + s$. Man verwandle sie dadurch in eine zweytheilige, daß man $p + q + r = a$ und $s = b$ setzt. Hier wird wieder $(p + q + r + s)^2 = (a + b)^2$ seyn. Dieß gibt $a^2 = (p + q + r)^2 = p^2 + 2\,pq + q^2 + 2\,(p + q)\,r + r^2$; $2ab = 2\,(p + q + r)\,s$ und $b^2 = s^2$. Daher besteht das Quadrat einer viertheiligen Wurzel aus sieben Stücken; nämlich:

1) aus dem Quadrate des I. Theils,

2) aus dem doppelten Producte des I. Theils in den II. Theil,

3) aus dem Quadrate des II. Theils,

4) aus dem doppelten Producte des I. und II. Theils in den III. Theil,

5) aus dem Quadrate des III. Theils,

6) aus dem doppelten Producte des I., II. und III. Theils in den IV. Theil, und

7) aus dem Quadrate des IV. Theils.

III. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens wird $(p + q + r + s + t)^2 = p^2 + 2pq + q^2 + 2(p + q)r + r^2 + 2(p + q + r)s + s_2 + 2(p + q + r + s)t + t^2$, woraus überhaupt ersichtlich ist, daß für jeden neuen Theil, der zur Wurzel kömmt, zwey neue Stücke zu ihrem Quadrate kommen; nämlich: ein doppeltes Product aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den neuen, und das Quadrat dieses neuen Theils.

IV. Daher ist es leicht, die Stücke zu bestimmen, woraus die Quadrate vieltheiliger Wurzeln überhaupt bestehen. Man bemerke folgende zwey Regeln:

1) Das Quadrat jeder viertheiligen Wurzel enthält, der Ordnung nach, die Quadrate aller Wurzeltheile von dem höchsten bis zum niedrigsten,

2) zwischen zweyen solcher unmittelbar auf einander folgenden Quadraten liegt immer ein doppeltes Product aus der Summe aller vorhergehenden Wurzeltheile in den neuen Wurzeltheil.

V. Es ist den Anfängern zu rathen, sich sowohl in dieser allgemeinen Formel, als auch in Berechnung der Zahlenbeyspiele zu üben, damit ihnen hierin die nöthige Fertigkeit zu Theil werde.

VI. Wenn man sich irgend eine vielzifferige Zahl z. B. 764283 als Quadratwurzel denkt, so ist aus dem Vorhergehenden klar, daß die 8 von der 1ten, die zwey von der 2ten, die 4 von der 3ten, die 6 von der 4ten und die 7 von der 5ten Decimalordnung sey. Dies soll durch die kleinen Ziffer bezeichnet werden,

welche sich oberhalb der größern befinden; nämlich $\overset{5}{7}\,\overset{4}{6}\,\overset{3}{4}\,\overset{2}{2}\,\overset{1}{8}\,3$, und welche man deshalb Ordnungsziffer nennt. Wird nun diese Zahl quadrirt, so kömmt das Quadrat von 7 auf die 5 + 5te d. h. auf die 10te Ordnung; das doppelte Product aus 7 in 6 kömmt auf die 5 + 4te d. h. auf die 9te, das Quadrat von 6 auf die 4 + 4te d. h. auf die 8te; das doppelte Product von 7 6 in 4 auf die 4 + 3te d. h. auf die 7te Ordnung u. s. w., bis das Quadrat von 3 sich, als Einer, auf der Nullordnung befindet. Hieraus folgt, daß alle Stücke, woraus das Quadrat von 764283 besteht mit ihrer niedrigsten Stelle in auf einander folgenden Ordnungen, von der 10ten bis zur Nullordnung anfangen, welches mit Demjenigen übereinstimmt, was bereits oben §. 3 bemerkt worden ist.

VII. Wenn eine vielzifferige Zahl als Quadratzahl gegeben ist, und man soll die Zahl ihrer Wurzeltheile bestimmen, so theile man sie von der Rechten zur Linken in Classen, jede zu zwey Ziffer, so ist die Zahl dieser Classen auch jene ihrer Wurzeltheile,

wenn sich in der linken Classe auch nur eine Ziffer befände.

Gesetzt, die Zahl wäre fünf- oder sechszifferig, so muß ihre Quadratwurzel dreytheilig seyn. Denn wäre sie zweytheilig, so könnte sie höchstens 99 seyn, wovon das Quadrat 9801 ist; wäre sie aber vierzifferig, so müßte sie zum wenigsten 1000 seyn, wovon das Quadrat 1000000 und somit größer, als die gegebene sechs- oder fünfzifferige Zahl ist.

Eine Quadratzahl von eilf oder zwölf Ziffern muß eine sechstheilige Wurzel haben. Denn eine fünftheilige Wurzel gibt ein Quadrat, welches aus 9 Stücken besteht und höchstens zehn Ziffer enthalten kann, folglich auch kleiner als das gegebene von eilf oder zwölf Ziffer seyn muß. Dagegen gibt eine siebentheilige Wurzel im Quadrate dreyzehn Stücke und folglich eine Zahl von wenigstens dreyzehn Ziffern, welche größer als die gegebene Quadratzahl seyn muß. — Auf ähnliche Art läßt sich der Beweis für jede gegebene vielzifferige Quadratzahl führen.

§. 6.

Bestimmung der Wurzeltheile aus vielzifferigen Quadratzahlen.

Um aus vielzifferigen Zahlen die Quadratwurzeln zu finden, bemerke man folgende Regeln:

I. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, gebe jeder Classe zwey Ziffer, so hat die Wurzel so viele Theile, als es Classen sind, und man wird die allgemeine Formel in Buchstaben entwickeln können, welche die Theile angibt, woraus die gegebene Quadratzahl besteht.

II. Man suche das größte Quadrat, welches von der höchsten Classe weggenommen werden kann, setze es unter diese Classe und ziehe es ab. Die Wurzel dieses Quadrates ist der I. Wurzeltheil, welchen man zur Rechten der gegebenen Zahl schreibt.

III. Zu dem Reste in II. nehme man die folgende Ziffer der Zahl, so enthält dieses

Ganze das doppelte Product aus dem I. Theile in den II Daher verdoppele man den ersten Wurzeltheil, dividire damit in diese Zahl, so ist der Quotient der II Wurzeltheil. Man multiplicire ihn mit dem doppelten I. Theile und ziehe dieses Product vom Dividenden ab.

IV. Zu dem etwaigen Reste in III. nehme man wieder die nächst niedrigere Ziffer der gegebenen Zahl, bilde das Quadrat des II. Wurzeltheils und ziehe es von der letztern Zahl ab, so ist, wenn dieser Abzug geschehen kann, der II. Wurzeltheil der richtige Wäre aber das letztere Quadrat größer, als daß es abgezogen werden könnte, so müßte dieser Wurzeltheil um eine Einheit so lange vermindert werden, bis der Abzug geschehen kann.

V. Zu dem Reste in IV. kömmt wieder die nächstfolgende Stelle der Zahl, und dieses Ganze enthält nun das doppelte Product aus dem I. und II. Theile in den III. Daher verdoppele man die zwey ersten Wurzeltheile, dividire damit in dasselbe so ist der Quotient

der III. Theil der Wurzel, welchen man wieder mit dem Divisor multiplicirt, dann dieses Factum vom Dividenden abzieht, zu diesem Reste die folgende Ziffer herunternimmt, und von diesem Ganzen das Quadrat des III. Theils subtrahirt; wo sich denn daraus, ob dieser Abzug geschehen kann oder nicht, ergibt, ob der III. Wurzeltheil richtig, oder zu groß angenommen worden ist, in welchem letztern Falle derselbe um eine oder um einige Einheiten vermindert werden muß.

VI. Zu dem in V. gebliebenen Reste kömmt wieder die folgende Ziffer der Zahl, und man fährt, um die übrigen Wurzeltheile zu finden, immer nach III., IV. und V. fort, indem man für die nachfolgenden Divisoren die doppelten Producte aus der Summe aller bereits gefundenen Wurzeltheile nimmt. Hierdurch kömmt man bis zum letzten Theile der Wurzel, dessen Quadrat, wenn es abgezogen ist, entweder einen Rest übrig läßt, oder nicht. In jenem Falle ist die gegebene Zahl um diesen Rest größer, als das Quadrat der gefundenen Wurzel; in diesem aber ist sie das vollkommene Quadrat dieser Wurzel.

VII. Eine Probe über dieses Verfahren ist, daß die gefundene Wurzel, mit sich selbst multiplicirt, und, im Falle ein Rest bleibt, derselbe dazu addirt, die vorgegebene Zahl wieder hervorbringen muß. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet genugsam aus den vorhergehenden §§.

Beyspiele.

I. $\sqrt{73 \mid 44 \mid 49}\ \left(\begin{matrix} a & b & c \\ 8 & 5 & 7 \end{matrix}\right.$ Wurzeltheile.

$\underline{64 = a^2}$	Probe.
94	857
$(16) = 2a$	$\underline{857}$
$\underline{80 = 2ab}$	5999
144	4285
$\underline{25 = b^2}$	$\underline{6856}$
1194	$734449 = 857^2$
$(170) = 2(a + b)$	
$\underline{1190 = 2(a + b)c}$	
49	
$\underline{49 = c^2}$	
00	

II. $\sqrt{78|54|73|92}$ $\left(\begin{matrix} a & b & c & d \\ 8 & 8 & 6 & 2 \end{matrix}\right.$

$$
\begin{array}{l}
64 = a^2 \\
\hline
145 \\
(16) = 2a \\
128 = 2ab \\
\hline
174 \\
64 = b^2 \\
\hline
1107 \\
(176) = 2(a + b) \\
1056 = 2(a + b)c \\
\hline
513 \\
36 = c^2 \\
\hline
4779 \\
(1772) = 2(a + b + c) \\
3544 = 2(a + b + c)d \\
\hline
12352 \\
4 = d^2 \\
\hline
12348 \text{ Rest}
\end{array}
$$

Probe.

```
       8862
       8862
     ------
      17724
     53172
    70896
   70896
 ----------
   78535044 Quadrat der gefund. Wurz.
      12348 der gebliebene Rest.
 ----------
   78547392 die gegebene Zahl.
```

III. $\sqrt{82 \mid 96 \mid 85 \mid 48 \mid 97} \; \left(\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ 9 & 1 & 0 & 8 & 7 \end{matrix} \right.$

```
     81 = a²
    ----
     19
    (18) = 2a
     18 = 2ab
    ----
      16
       1 = b²
     ----
```

$$
\begin{array}{l}
158 \\
(182) = 2\,(a + b) \\
000 = 2\,(a + b)c \\
\hline
1585 \\
\quad 0 = c^2 \\
\hline
15854 \\
(1820) = 2\,(a + b + c) \\
14560 = 2\,(a + b + c)d \\
\hline
12948 \\
\quad 64 = d^2 \\
\hline
128849 \\
(18216) = 2\,(a + b + c + d) \\
127512 = 2\,(a + b + c + d)e \\
\hline
13377 \\
\quad 49 = e^2 \\
\hline
\end{array}
$$

13328 Rest.

Probe.

```
        91087
        91087
      -------
       637609
      728696
     91087
    819783
    ----------
    8296841569 = 91087²
         13328 Rest
    ----------
    8296854897 die gegebene Zahl.
```

Anfängern ist eine Uebung in Auflösung ähnlicher Aufgaben sehr zu empfehlen.

§. 7.

Quadratwurzeln aus gemeinen Brüchen.

Das Quadrat eines gemeinen Bruchs entsteht, wenn man sowohl seinen Zähler, als auch seinen Nenner zum Quadrate erhebt. Denn $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a}{b \times b} = \frac{a^2}{b^2}$. Ist dieser

Bruch ein ächter, so muß sein Quadrat kleiner, als die Wurzel seyn. Z. B. $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, wo denn $\frac{4}{9}$ kleiner, als $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ ist, u. s. w. Soll man daher aus einem gegebenen gemeinen Bruche die Quadratwurzel ziehen, so muß diese Wurzel sowohl aus seinem Zähler, als auch aus dem Nenner gezogen werden. $\sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}$; oder allgemein $\sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$. Da in den meisten Fällen die Zahlen des Zählers und Nenners keine vollkommene Quadrate seyn werden, so kann man, durch einen kleinen Kunstgriff, den gegebenen Bruch in einen ihm gleichen verwandeln, dessen Zähler oder Nenner ein genaues Quadrat ist. Der Bruch sey $\frac{7}{13}$, worin weder 7 noch 13 ein vollkommenes Quadrat ist. Da aber $\sqrt{\frac{7}{13}} = \sqrt{\frac{7 \times 7}{13 \times 7}} = \frac{\sqrt{7 \times 7}}{\sqrt{13 \times 7}} = \frac{7}{\sqrt{91}}$, so braucht man die Quadratwurzel nur noch

aus dem Nenner 51 zu finden. Auch könnte man sagen: $\sqrt{\frac{7}{13}} = \sqrt{\frac{7 \times 13}{13 \times 13}} = \frac{\sqrt{7 \times 13}}{\sqrt{13 \times 13}}$ $= \frac{\sqrt{51}}{13}$, wobey man das Wurzelausziehen aus dem Nenner erspart.

§. 8.

Entstehung und Begriff der Irrationalzahlen.

I. Man denke sich die Reihe der natürlichen Zahlen, nebst ihren Quadraten:

1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 4 9 16 25 36 49 64 81, und

wähle sich zwischen irgend zwey dieser Quadratzahlen eine beliebige Zwischenzahl, z. B. 32, so ist klar, daß, weil 32 größer als 25, aber kleiner als 36 ist, auch die Quadratwurzel von 32 größer als 5 und kleiner als 6 seyn müsse. Was aber mehr als 5, und weniger als 6 ist, muß 5 Ganze nebst einem ächten Bruche seyn, welchen man sich unter

der Form $\frac{n}{m}$ vorstellen kann. Wenn daher 32 eine ganz genau anzugebende Quadratwurzel hat, so muß sie $5 + \frac{n}{m}$ seyn.

II. Wäre nun $5 + \frac{n}{m}$ die genaue Quadratwurzel von 32, so müßte $(5 + \frac{n}{m})^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times \frac{n}{m} + (\frac{n}{m})^2 = 32$ seyn. Nun ist aber $\frac{n}{m}$ ein ächter Bruch, folglich dessen Quadrat $(\frac{n}{m})^2$ ein noch kleinerer ächter Bruch (§. 7), welcher zu $5^2 + 2 \times 5 \times \frac{n}{m}$ addirt, niemals die reine ganze Zahl 32 hervorbringen kann.

III. Daher gibt es unter allen denkbaren ächten Brüchen keinen einzigen, welcher, zur Zahl 5 gesetzt, die genaue Quadratwurzel von 32 seyn könnte. Folglich ist $\sqrt{32}$ eine Zahl,

welche niemals mit vollendeter Genauigkeit angegeben werden kann. Solche Zahlen, deren Werth weder durch Ganze, noch durch Bruchtheile vollkommen genau bestimmt werden kann, nennt man Irrationalzahlen. Die

Zahlen $\sqrt{26}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{30}$,

$\sqrt{31}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{33}$, $\sqrt{34}$, $\sqrt{35}$ sind die

zwischen 25 und 36, liegenden Irrationalzahlen in Bezug auf die Darstellung ihrer Quadratwurzeln.

IV. Denkt man sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, so befinden sich nur 10 vollkommene Quadrate darunter. Die 90 übrigen Zahlen aber haben keine genaue Quadratwurzeln und sind deshalb irrationale Zahlen. Soll man daher diese Wurzeln dennoch angeben, so bleibt kein anderes Mittel, als ihren Werth so genau darzustellen, daß der noch dabey befindliche Fehler so klein werden kann, als man will. Diese Methode soll nun erklärt werden.

§. 9.

Bestimmung der Quadratwurzeln aus Irrationalzahlen.

Um aus unvollständigen Quadratzahlen die Wurzeln durch Annäherung so genau zu finden, als man nur immer will, bemerke man Folgendes:

I. Sollte man z. B. $\sqrt{7}$ finden, so ist dieselbe kleiner als 3 und größer als 2. Man setze nun $7 = \frac{700}{100}$, so wird auch $\sqrt{7} = \sqrt{\frac{700}{100}} = \frac{\sqrt{700}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{700}}{10}$. Hier gibt aber 700 eine zweytheilige Wurzel, d. h. einen Einer und einen Zehner, welche, durch einen Zehner dividirt, einen Einer nebst einem Decimalbruche von Zehntel geben, wodurch $\sqrt{7}$ in zwey Ganzen nebst Zehntel bestimmt ist. Setzt man $7 = \frac{70000}{10000}$, so wird $\sqrt{7} = \sqrt{\frac{70000}{10000}} = \frac{\sqrt{70000}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{70000}}{100}$. Da aber

70000 eine dreytheilige Wurzel gibt, welche, durch 100 dividirt, ausser den zwey Ganzen, noch Zehntel und Hundertel hervorbringt, so würde nun $\sqrt{7}$ noch genauer bestimmt seyn. Nähme man $7 = \frac{7000000}{1000000}$, so würde $\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7000000}{1000000}} = \frac{\sqrt{7000000}}{1000}$ seyn, woraus man ausser den 2 Ganzen noch Zehntel, Hunderttel und Tausendtel für die Wurzel erhielte.

II. Ueberhaupt folgt hieraus, daß für jedes Paar Nullen, welches man an die gegebene Zahl hängt, ein neuer Bruchtheil der Wurzel gefunden werde. Da nun diesem Anhängen von Nullen keine Gränzen gesetzt sind, so kann man die Quadratwurzel immer genauer finden. Die allgemeine Regel heißt: Wenn man die Wurzel auf eine der Zahl nach bestimmte Decimalbruchstelle (z. B. auf die 3te, 5te, 6te u. s. f.) finden will, so hänge man an die gegebene Zahl, oder an den nach der gewöhnlichen Wurzelausziehung bleibenden Rest, so viele Paare von Nullen, als auf die

§. 9.

Bestimmung der Quadratwurzeln aus Irrationalzahlen.

Um aus unvollständigen Quadratzahlen die Wurzeln durch Annäherung so genau zu finden, als man nur immer will, bemerke man Folgendes:.

I. Sollte man z. B. $\sqrt{7}$ finden, so ist dieselbe kleiner als 3 und größer als 2. Man setze nun $7 = \frac{700}{100}$, so wird auch $\sqrt{7} = \sqrt{\frac{700}{100}} = \frac{\sqrt{700}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{700}}{10}$. Hier gibt aber 700 eine zweytheilige Wurzel, d. h. einen Einer und einen Zehner, welche, durch einen Zehner dividirt, einen Einer nebst einem Decimalbruche von Zehntel geben, wodurch $\sqrt{7}$ in zwey Ganzen nebst Zehntel bestimmt ist. Setzt man $7 = \frac{70000}{10000}$, so wird $\sqrt{7} = \sqrt{\frac{70000}{10000}} = \frac{\sqrt{70000}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{70000}}{100}$. Da aber

70000 eine dreytheilige Wurzel gibt, welche, durch 100 dividirt, ausser den zwey Ganzen, noch Zehntel und Hundertel hervorbringt, so würde nun $\sqrt{7}$ noch genauer bestimmt seyn.

Nähme man $7 = \frac{7000000}{1000000}$, so würde $\sqrt{7} =$ $\sqrt{\frac{7000000}{1000000}} = \frac{\sqrt{7000000}}{1000}$ seyn, woraus man ausser den 2 Ganzen noch Zehntel, Hunderttel und Tausendtel für die Wurzel erhielte.

II. Ueberhaupt folgt hieraus, daß für jedes Paar Nullen, welches man an die gegebene Zahl hängt, ein neuer Bruchtheil der Wurzel gefunden werde. Da nun diesem Anhängen von Nullen keine Gränzen gesetzt sind, so kann man die Quadratwurzel immer genauer finden. Die allgemeine Regel heißt: Wenn man die Wurzel auf eine der Zahl nach bestimmte Decimalbruchstelle (z. B. auf die 3te, 5te, 6te u. s. f.) finden will, so hänge man an die gegebene Zahl, oder an den nach der gewöhnlichen Wurzelausziehung bleibenden Rest, so viele Paare von Nullen, als auf die

wievielste Decimalbruchstelle der Werth der Wurzel gefunden werden soll. Folgende Beyspiele dienen zur Erläuterung.

Beyspiele.

I. Man soll $\sqrt{8}$ finden. Hier setze man

$$\sqrt{8} = \sqrt{\frac{800000000}{100000000}} = \frac{\sqrt{800000000}}{10000},$$ so

gibt die Rechnung Folgendes:

$\sqrt{}$ 8 | 00 | 00 | 00 | 00 (2,8284 Theile der Wurzel.

```
     8 | 00 | 00 | 00 | 00 (2,8284
     4
    ----
 4 | 40
     32
    ----
     80
     64
    ----
56 | 160
     112
    -----
     480
       4
    -----
```

564 | 4760
      4512
      ————
      2480
        64
      ————
5656 | 24160
       22624
       —————
       15360
          16
       —————
       15344 Rest.

Folglich wird $\sqrt{8} = \frac{28284}{10000} = 2{,}8284$, wodurch diese Wurzel bis auf zehntausendtel mit Genauigkeit gefunden ist. Wollte man sie noch schärfer ausdrücken, so dürfte man nur dem Reste zwey Nullen anhängen und die Rechnung fortsetzen, woraus erhellet, daß diese Wurzel in so kleinen Decimaltheilen gefunden werden kann, als nur immer gefodert wird. Die Probe über vorstehende Rechnung ist diese:

```
     2,8284
     2,8284
   ---------
    113136
   226272
   56568
  226272
  56568
  -----------
  7,99984656 = (2,8284)²
       15344 der gebliebene Rest.
  -----------
  8,00000000
```

II. Um $\sqrt{127}$ in Hunderttausendtel zu finden, müssen, da Hunderttausendtel von der fünften Decimalbruchstelle sind, an die 127 fünf Paare d. h. 10 Nullen gehängt, dann $\sqrt{1270000000000}$ berechnet und das Resultat durch 100000 dividirt werden. Die Rechnung hierüber ist folgende:

```
V 1|27|00|00|00|00|00(11,26942
   1
2 | 2
    2
    7
    1
22 | 60
     44
     160
       4
224 | 1560
      1344
       2160
         36
2252 | 21240
       20268
        9720
          81
22538 | 96390
        90152
        62380
           16
225388 | 623640
         450776
        1728640
              4
        1728636 Rest.
```

Daher ist $\sqrt{127} = 11,26942$, und die Probe darüber ist folgende:

$$
\begin{array}{r}
11,26942 \\
11,26942 \\
\hline
2253884 \\
4507768 \\
10142478 \\
6761652 \\
2253884 \\
1126942 \\
1126642 \\
\hline
126,9998271364 = (11,26942)^2 \\
1728636 \text{ Rest addirt.} \\
\hline
127,0000000000 = 127.
\end{array}
$$

§. 10.

Quadratwurzeln aus gemeinen und aus zehntheiligen Brüchen.

Es ist bereits oben erklärt worden, daß man die Quadratwurzel eines gemeinen Bruchs

findet, wenn man diese Wurzel sowohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner zieht; auch, daß man ein bequemeres Verfahren anwenden kann, um das Wurzelausziehen einmal zu ersparen. Diese Fälle sollen hier erläutert werden.

I. $\sqrt{\frac{7}{13}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{13}} = \frac{2,6457513}{3,6055513}$, und man sieht, daß man den Nenner in den Zähler dividiren könne, um die Quadratwurzel in einem Decimalbruche zu erhalten, eine Uebung, welche Anfängern zu empfehlen ist.

$\sqrt{\frac{82}{99}} = \frac{\sqrt{82}}{\sqrt{99}} = \frac{9,0553851}{9,9498744}$; $\sqrt{\frac{212}{245}} = \frac{\sqrt{216}}{\sqrt{245}} = \frac{14,6969385}{15,6524759}$; $\sqrt{\frac{643}{665}} = \frac{\sqrt{643}}{\sqrt{665}} = \frac{25,3574446}{25,7875939}$; $\sqrt{\frac{525}{491}} = \frac{\sqrt{525}}{\sqrt{491}} = \frac{22,9128785}{22,1585198}$; $\sqrt{\frac{955}{35}} = \frac{\sqrt{945}}{\sqrt{35}} = \frac{30,7408523}{5,9160798}$ u. s. w.

II. $\sqrt{\frac{8}{37}} = \sqrt{\frac{8 \times 8}{37 \times 8}} = \frac{\sqrt{8 \times 8}}{\sqrt{37 \times 8}} = \frac{8}{\sqrt{296}} = \frac{8}{17,2046505}$; $\sqrt{\frac{19}{67}} = \sqrt{\frac{19 \times 19}{67 \times 19}}$

$$= \frac{19}{\sqrt{127\frac{?}{}}} = \frac{19}{35,69\ldots\ldots}; \sqrt{\frac{12}{43}} = \sqrt{\frac{12 \times 43}{43 \times 43}} = \frac{\sqrt{516}}{43} = \frac{22,7156334}{43}; \sqrt{\frac{83}{17}} = \sqrt{\frac{83 \times 17}{17 \times 17}} = \frac{\sqrt{1411}}{17}$$ u. s. w.

III. Um aus gegebenen Decimalbrüchen die Quadratwurzeln zu ziehen, bemerke man, daß diese Brüche, da sie nach dem decadischen Gesetze gebildet sind, auch bey dem Wurzelausziehen gleich ganzen Zahlen behandelt werden können. Das Einzige, worauf man sehen muß, ist, daß die Zahl der Decimalbruchstellen jedesmal eine gerade ist; denn die 100tel, 10000tel, 1000000tel u, s. w. geben der Ordnung nach 10tel, 100tel, 1000tel u. s. w. zur Quadratwurzel; aber die 1000tel, 100000tel u. s. w. haben ihre Quadratwurzeln zwischen 10tel und 100tel; zwischen 100tel und 1000tel u. s. f. Ist daher die Zahl der Decimalbruchstellen jenes Bruches, dessen Wurzel man finden soll, eine ungerade, so muß zur Rechten eine Nulle angehängt werden, welches den Werth des Decimalbruchs nicht verändert,

aber die gehörige Classenabtheilung möglich macht. Folgende Beyspiele werden dieses aufklären:

1) $\sqrt{0{,}275625} = \sqrt{\frac{275625}{1000000}} = \frac{\sqrt{275625}}{1000}$
$= \frac{525}{1000} = 0{,}525$;

2) $\sqrt{0{,}648025} = \sqrt{\frac{648025}{1000000}} = \frac{\sqrt{948025}}{1000}$
$= \frac{805}{1000} = 0{,}805$;

3) $\sqrt{0{,}893025} = \sqrt{\frac{893025}{1000000}} = \frac{\sqrt{893025}}{1000}$
$= \frac{946}{1000} = 0{,}945$;

4) $\sqrt{0{,}11025} = \sqrt{\frac{11025}{100000}} = \sqrt{\frac{110250}{1000000}}$
$= \frac{\sqrt{110250}}{1000} = \frac{105}{1000} = 0{,}105$;

5) $\sqrt{0{,}55225} = \sqrt{\frac{55225}{100000}} = \frac{\sqrt{552250}}{1000000}$
$= \frac{235}{1000} = 0235$;

6) $\sqrt{0{,}27225} = \sqrt{\frac{27225}{100000}} = \frac{\sqrt{272250}}{1000000}$

$= \frac{165}{1000} = 0{,}165$;

7) $\sqrt{27{,}5625} = 5{,}25$; $\sqrt{18{,}8356} = 4{,}34$;

$\sqrt{6480{,}25} = 80{,}5$; $\sqrt{8742{,}25} = 93{,}5$;

$\sqrt{96{,}8256} = 9{,}84$; $\sqrt{71{,}4025} = 8{,}45$ u. s. w.

IV. Auch kann man aus gemeinen Brüchen dadurch die Quadratwurzeln bestimmen, daß man sie zuerst in Decimalbrüche verwandelt, und sodann aus diesen die Wurzeln zieht. So ist z. B. $\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{0{,}625}$; $\sqrt{\frac{4}{7}} =$

$\sqrt{0{,}5714285 \ldots}$, wo mit dieser 5 die ersten 6 Ziffer wieder zurückkehren; $\sqrt{\frac{5}{6}} =$

$\sqrt{0{,}833333 \ldots}$ $\sqrt{\frac{17}{5}} = \sqrt{3{,}4}$; $\sqrt{\frac{146}{8}} =$

$\sqrt{18{,}25}$ u. s. w.

§. 11.

Einige Anwendungen von der Lehre der Quadratwurzel-Ausziehung.

1. Man soll zu zwey gegebenen Zahlen eine mittlere geometrische Proportionalzahl finden. Nennt man diese Zahlen a und b, und die zu findende X, so ist a : X = X : b, folglich $X^2 = a \times b$, und $X = \sqrt{a \times b}$. Man muß daher aus dem Producte der gegebenen Zahlen die Quadratwurzel ziehen, um ihre mittlere geometrische Proportionalzahl zu finden. Diese Zahlen seyen 10 und 64, so ist $10 : X = X : 64$, daher $X = \sqrt{10 \times 64} = \sqrt{640} = 25,2982213$.

Zwischen 10 und 31 ist die mittlere Proportionale $= \sqrt{310} = 17,6068168$; zwischen 5 und 68 ist sie $= \sqrt{340} = 18,4390889$;

zwischen 2 und 259 wird dieselbe $= \sqrt{2 \times 259}$ $= \sqrt{518} = 22,7596136$ u. s. w. Diese Aufgabe ist somit eine Ergänzung derjenigen, wovon oben (VII. Buch §. 12) Erwähnung geschah.

II. Bey Bestimmung des Werthes der Edelsteine nimmt man an, daß derselbe nach den Quadratzahlen ihrer Gewichte zunimmt; d. h. Ein Edelstein, welcher 2, 3 oder 4mal soviel Gewicht als ein anderer von der nämlichen Art hat, ist 4, 9 oder 16mal soviel werth, als jener. Gesetzt nun, ein Diamant, welcher 6 Grane wiegt, sey $5\frac{1}{2}$ Gulden; welches Gewicht muß ein anderer haben, dessen Werth 3000 Gulden ist? Hier ist

$$5\frac{1}{2} : 3000 = 6^2 : x^2, \text{ folglich}$$

$$\frac{11}{2} : 3000 = 36 : x^2$$

$$11 : 6000 = 36 : x^2, \text{ daher}$$

$X^2 = \frac{6000 \times 36}{11} = \frac{216000}{11}$. Somit wird $X = \sqrt{\frac{2160000}{11}} = \sqrt{\frac{216000 \times 11}{11 \times 11}} = \frac{\sqrt{2376000}}{11} = \frac{1541}{11} = 140\,\frac{1}{11}$. Der gegebene Diamant müßte daher $140\,\frac{1}{11}$ Grane wiegen.

III. Wie viele Weinstöcke können auf ein quadratisches Feld, dessen Fläche 160 Quadratruthen beträgt, gepflanzt werden, wenn man jedesmal zwischen zwey Stöcken einen Raum von $2\,\frac{1}{2}$ Schuhen läßt.

Um den Sinn dieser Aufgabe gehörig zu fassen, bemerke man, daß der Flächeninhalt eines Quadrates gefunden werde, wenn man das Maas seiner Seite mit sich selbst multiplicirt; wenn z. B. diese Seite 5 Schuhe betrüge, so wäre dessen Inhalt $= 5 \times 5$ oder 25 Quadratschuhe d. h. man könnte die Fläche mit 25 kleinen Quadraten, deren jedes 1 Schuh lang und 1 Schuh breit ist, genau ausfüllen. Da nun der Flächeinhalt des

gegebenen Quadrates 160 Quadratruthen beträgt, so findet man die Größe seiner Seitenlinie durch die Quadratwurzel aus 160. Allein $\sqrt{160} = 12,64$ Ruthen, oder, weil 10 Schuh eine Ruthe bilden, $= 126,4$ Schuhe. Da aber der Abstand zweyer Weinstöcke $= 2\frac{1}{2}$ Schuhe $= 2,5$ Schuhe, so muß man mit 2, 5 in 126,4 dividiren, um die Zahl der Stöcke zu finden, welche auf **einer** Seite Raum finden. Den Quotienten 59, 561 multiplicire man mit sich selbst, um die Zahl aller Stöcke auf dem ganzen Quadrate zu finden, welche $= 2556,3136$ wird, wofür man 2556 annehmen muß.

IV. Um einen kreisförmigen Flächenraum von 40 Quadratruthen mit Bäumen zu umpflanzen, braucht man 300 Stücke; wie viele Bäume wird man nöthig haben, um einen andern kreisrunden Platz von 24 Quadratruthen auf ähnliche Art zu umgeben? Zur Beantwortung dieser Frage muß man bemerken, daß sich die Größen der Kreisflächen

wie die Quadratzahlen des Maases ihrer Durchmesser, oder auch ihrer Umfangslinien verhalten. Wenn z. B. der Durchmesser eines Kreises 2 oder 3mal so groß, als jener eines andern ist, so ist die Fläche des ersten 4 oder 9mal so groß, als jene des zweyten. Nennt man daher das Quadrat der zu findenden Anzahl von Bäumen X^2, so verhält sich

$$40 : 24 = 300^2 : X^2, \text{ oder}$$
$$40 : 24 = 90000 : X^2, \text{ oder}$$
$$5 : 3 = 90000 : X^2, \text{ oder}$$
$$1 : 3 = 18000 : X^2, \text{ woraus}$$

$X^2 = 3 \times 18000 = 54000$, folglich $X = \sqrt{54000} = 232$ nebst einem Reste wird. Daher wird man 232 Bäume nothwendig haben.

V. Die Zahlen 846, 1234 und 82 sollen in ein ihnen zusammengenommen gleiches Quadrat verwandelt werden; wie groß ist dessen Wurzel? Offenbar muß man hier die Quadratwurzel aus ihrer Summe ziehen. Es ist aber $\sqrt{(846 + 1234 + 82)} = \sqrt{2162} = 46, 49 \ldots$

Sollte man die Zahlen 8, 24 und 35 in ein Quadrat verwandeln, dessen Wurzel gesucht

wird, so ist diese $= \sqrt{(8 + 24 + 35)} = \sqrt{67} = 8{,}1853527 \ldots\ldots$

Auf gleiche Art kann man auch den Unterschied zweyer Zahlen durch ein Quadrat ausdrücken und seine Wurzel suchen; z. B. die Differenz von 1286 — 974 in ein Quadrat zu verwandeln. Da diese Differenz $= 312$ ist, so suche man $\sqrt{312}$, welche $= 17{,}6635217$ wird u. s. w.

Neuntes Buch.

Von der Ausziehung der Cubikwurzeln.

§. 1.

Vorbegriffe.

Wenn man eine Zahl zweymal mit sich selbst multiplicirt, oder dreymal als Factor setzt, so heißt das Product der Würfel, Cubus, oder die dritte Potenz jener Zahl. So ist z. B. $4 \times 4 \times 4 = 64$, und 64 ist der Würfel von 4; ebenso ist a^3, b^3, 27, $\frac{64}{125}$ die dritte Potenz von a, b, 3, $\frac{4}{5}$, und die Größen

a, b, 3, $\frac{4}{5}$ werden die Cubikwurzeln jener Zahlen genennt.

Aus einer gegebenen Zahl die Cubikwurzel ziehen heißt, eine andere finden, welche 2mal mit sich selbst multiplicirt, jene gegebene wieder hervorbringt. Das Zeichen dafür ist $\sqrt[3]{}$, und $\sqrt[3]{729}$ heißt soviel, als die Cubikwurzel von 729 zu finden, welche = 9 ist, da 9 X 9 X 9 = 729.

§. .2

Theile der Würfel ein= und zweytheiliger Wurzeln.

I. Die eintheiligen Cubikwurzeln und ihre Würfel findet man sehr leicht. Sie sind folgende:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729.

II Erhebt man aber eine zweytheilige Wurzel zum Würfel, so erhält man die Stücke,

woraus derselbe besteht, wenn man das Quadrat von a + b, oder $a^2 + 2ab + b^2$ noch einmal mit a + b multiplicirt. Nämlich:

$$\begin{array}{lllll} a^2 & + 2ab & + b^2 & & \text{Quadrat.} \\ a & + b & & & \text{Wurzel.} \\ \hline a^3 & + 2a^2b & + ab^2 & & \\ & a^2b & + 2ab^2 & + b^3 & \\ \hline a^3 & + 3a^2b & + 3ab^2 & + b^3 & \text{Würfel.} \end{array}$$

Daher besteht der Würfel einer zweytheiligen Wurzel aus folgenden vier Stücken:

a) aus dem Würfel des I. Theils,

b) aus einem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des I. Theils in den II. Theil, sodann

c) aus einem dreyfachen Producte aus dem I. Theile in das Quadrat des II. Theils, und endlich

d) aus dem Würfel des II. Theils.

Wenn die gegebene Wurzel 24 = 20 + 4 ist, so findet man die Bestandtheile ihres Würfels folgendergestalt:

$a^3 = 20^3 = 8000$
$3a^2b = 3 \times 20^2 \times 4 = 12 \times 400 = 4800$
$3ab^2 = 3 \times 20 \times 4^2 = 60 \times 16 = 960$
$b^3 = 4^3 = 64$ folglich ist
$(20 + 4)^3 = 8000 + 4800 + 960 + 64 = 13824$, welches mit der gewöhnlichen Rechnung übereinstimmt; nämlich:

24	Wurzel.
24	Wurzel.
96	
48	
576	Quadrat.
24	Wurzel.
2304	
1152	
13824	Würfel.

§. 3.

Folgerungen hieraus.

I. Der Würfel des I. Theils muß, als Cubus eines Zehners, in den Tausenden seine

niedrigste Stelle haben. Er kann aber höchstens in die Hunderttausende steigen, da $90^3 = 729000$ ist.

II. Da das dreyfache Product ein Factum aus dem Quadrate eines Zehners in einen Einer ist, so muß jenes Product wenigstens von der Stelle der Hunderter seyn.

III. Das darauf folgende dreyfache Product aus dem I. Theil in das Quadrat des II. hat zum einen Factor einen Zehner und muß daher wenigstens von der Stelle der Zehner seyn.

IV. Der Würfel des II. Theils endlich muß seine niedrigste Stelle nothwendig in den Einern haben.

V. Aus Vorstehendem ist klar, daß die vier Stücke, welche den Würfel einer zweytheiligen Wurzel bilden, in unmittelbar aufeinander folgenden Ordnungen, von den Tausenden bis zu den Einern anfangen.

VI. Der Würfel der größten zweytheiligen Wurzel, oder $99^3 = 970299$, eine Zahl von sechs Ziffern. Der Würfel der kleinsten

zweytheiligen Wurzel aber, oder $10^3 = 1000$, die kleinste Zahl von vier Ziffern. Folglich muß jede 6, 5, 4zifferige Zahl eine zweytheilige Cubikwurzel haben. Theilt man daher eine solche Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, jede zu drey Ziffer, so hat die Wurzel so viele Theile als es Classen sind; obgleich in der linken Classe nur eine oder zwey Ziffer stehen.

VII. In der niedrigsten Ziffer der rechten Classe fängt b^3, der Würfel des II. Theils, in der nächst höhern Ziffer das Product $3ab^2$; in der unmittelbar folgenden das Product $3a^2b$ und in der niedrigsten Ziffer der linken Classe der Würfel des I. Theils a^3, an.

VIII. Das Ausziehen der Cubikwurzeln aus Zahlen von 6. 5 oder 4 Ziffern beruht darauf, daß a^3, $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 nach und nach, und von den gehörigen Ordnungen der Zahlen abgezogen werden. Da diese Rechnung mit Ausziehung der Quadratwurzeln große Aehnlichkeit hat, so wird man den Gang des Verfahrens aus folgenden Beyspielen leicht übersehen.

§ 4.

Cubikwurzeln aus Zahlen von 4, 5 und 6 Ziffern.

I. Um $\sqrt[3]{3375}$ zu finden, durchgehe man folgende Rechnung:

$\sqrt[3]{3 \mid 375}$ (a b = 1 5	
$a^3 = 1$	Probe.
$3a^2 = 3 \mid 23$	15 Wurzel.
$3a^2 b = \mid 15$	15
87	75
$3ab^2 = 75$	15
125	225 Quadrat.
$b^3 = 125$	15
000	1125
	225
	3375 Würfel.

II. Um $\sqrt[3]{42 \mid 875}$ zu bestimmen, rechne man folgendergestalt:

$\sqrt[3]{42 \mid 875}$	(a b 3 5 Wurzeltheile.
$a^3 = 27$	Probe.
$3a^2 = 27 \mid 158$	35 Wurzel.
$3a^2b = 135$	35
237	175
$3ab^2 = 225$	105
125	1225 Quadrat.
$b^3 = 125$	35
000	6125
	3675
	42875 Würfel.

III. $\sqrt[3]{636056}$ wird folgendergestalt gefunden:

$\sqrt[3]{636 \mid 056}$ ($\overset{a}{8}\ \overset{b}{6}$ Wurzeltheile

$a^3 = 512$

$3a^2 = 192 \mid 1240$

$3a^2 b = \mid 1152$

885

$3ab^2 = 864$

216

$b^3 = 216$

000

IV. $\sqrt[3]{912 \mid 689}$ ($\overset{a}{9}\ \overset{b}{7}$ Wurzelth.

$a^3 = 729$

$3a^2 = 243 \mid 1836$

$3a^2 b = \mid 1701$

1358

$3ab^2 = 1323$

359

$b^3 = 343$

16 Rest.

Dieser Rest zeigt an, daß die gegebene Zahl kein vollkommener Würfel, sondern um 16 größer ist, als der Cubus von 97. Wie man die Cubikwurzel durch Annäherung finden könne, wird weiter unten erklärt werden.

§. 5.

Bestimmung der Stücke des Würfels mehrtheiliger Wurzeln.

I. Um die Stücke zu bestimmen, welche den Würfel mehrtheiliger Wurzeln bilden, wähle man zuerst die dreytheilige Wurzel $p + q + r$ und bestimme $(p + q + r)^3$ dadurch, daß man $p + q = a$, und $r = b$ setzt. Hier wird $a^3 = (p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$; $3a^2b = 3(p + q)^2r$; $3ab^2 = 3(p + q)r^2$ und $b^3 = r^3$, woraus man erkennt, daß $(p + q + r)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + 3(p + q)^2r + 3(p + q)r^2 + r^3$ d. h. der Würfel einer dreytheiligen Wurzel enthält 7 Stücke, welche man leicht mit Worten aussprechen kann. Sowohl

dieses, als auch die wirkliche Berechnung eines Würfels in Zahlen nach diesen Stücken, ist den Anfängern sehr zu empfehlen.

II. Um $(p + q + r + s)^3$ zu entwickeln, setze man $p + q + r = a$ und $s = b$, so wird $(a + b)^3 = (p + q + r + s)^3$. Dies gibt:

$$a^3 = (p + q + r)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + 3(p + q)^2 r + 3(p + q)r^2 + r^3.$$
$$3a^2b = 3(p + q + r)^2 s.$$
$$3ab^2 = 3(p + q + r)s^2.$$
$$b^3 = s^3.$$

Hieraus sieht man, daß der Würfel einer dreytheiligen Wurzel aus zehn Stücken besteht, welche wiederum mit Worten genau bezeichnet werden können.

III. Ueberhaupt wird man leicht das allgemeine Gesetz erkennen, nach welchem die Stücke des Würfels vieltheiliger Wurzeln bestimmt werden. Es ist folgendes:

1) Der Würfel einer vieltheiligen Wurzel enthält, der Ordnung nach, die Würfel aller auf einander folgenden Wurzeltheile vom höchsten bis zum niedrigsten dieser Theile;

2) zwischen je zwey dieser Würfel liegen jedesmal 2 dreyfache Producte; das erste aus dem Quadrate der Summe aller vorhergehenden Wurzeltheile in den neuen, das zweyte aber aus der Summe eben dieser Theile in das Quadrat des neuen Wurzeltheils.

IV. Es ist den Anfängern zu empfehlen, sich sowohl in Entwickelung dieser allgemeinen Formel, als auch in Berechnung solcher Zahlenbeyspiele, worin die Würfel aus ihren Bestandtheilen zusammengesetzt werden, zu üben.

V. Wenn man sich irgend eine Zahl, z. B. 8764 als Cubikwürzel denkt, so ist 8000 der erste, 700 der zweyte, 60 der dritte und 4 der vierte Wurzeltheil, welche man sich durch die Buchstaben a, b, c und d bezeichnen kann.

Der Würfel von a ist hier 512 nebst 9 Nullen; $3a^2b$ aber 3 X 64 X 7 nebst 8 Nullen; $3ab^2$ aber 3 X 8 X 49 nebst 7 Nullen, b^3 aber 343 nebst 6 Nullen; u. s. w., woraus man überhaupt einsieht, daß alle Stücke, welche den Würfel der Zahl 8764 bilden, in unmittelbar auf einander folgenden Ordnungen ihren Anfang nehmen.

VI. Wenn eine Zahl von mehr als 6 Ziffer als Würfel gegeben ist, und man soll die Zahl ihrer Würzeltheile finden, so muß sie von der Rechten zur Linken in Classen, jede zu drey Ziffer, getheilt werden; wo denn die Zahl der Classen auch die Menge dieser Wurzeltheile angibt. So muß z. B. jede Zahl von 7, 8 oder 9 Ziffern eine dreytheilige Cubikwurzel haben. Denn die größte Zahl von 2 Ziffern ist 99 und ihr Würfel 970299, folglich kleiner, als die kleinste Zahl von 7 Ziffern. Die kleinste 4zifferige Zahl aber ist 1000, ihr Würfel 1000000000, folglich größer, als die größte Zahl von 9 Ziffern. Auf gleiche Weise läßt sich dieses auch für mehrzifferige Wurzeln darthun.

§. 6.

Bestimmung der Cubikwurzeln aus vierzifferigen Zahlen überhaupt.

Da diese Rechnung mit dem Ausziehen der Quadratwurzeln aus vielzifferigen Zahlen große Aehnlichkeit hat, so werden nachstehende Beyspiele, in Verbindung mit den vorhergehenden §§., hinreichend seyn, sich von der Richtigkeit des Verfahrens zu überzeugen.

$$\sqrt{1 \mid 953\,125} \left(\begin{matrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 5 \end{matrix} \right. \text{Wurzelth.}$$

$a^3 = 1$		Probe.
$3a^2 = 3$	9	125 *Wurzel.*
$3a^2 b = 6$		125
	35	625
$3ab^2 = 12$		250
	233	125
$b^3 = 8$		15625 Quad.
$3(a+b)^2 = 432$	2251	125
$3(a+b)^2 c = 2160$		78125
	912	31250
$3(a+b)c^2 = 900$		15625
	125	1953125 Würfel.
$c^3 = 125$		
	000	

$\sqrt[3]{843 | 908 | 625}$ (a b c — 9 4 5 Wurzelth.

$a^3 = 729$

$3a^2 = 243 \mid 1149$

$3a^2 b = 972$

1770

$3ab^2 = 432$

13388

$b^3 = 64$

$3(a+b)^2 = 26508 \mid 133246$

$3(a+b)^2 c = 132540$

7062

$3(a+b)c^2 = 7050$

125

$c^3 = 125$

000

Die Probe darüber ist leicht zu machen; auch werden Anfänger wohl thun, wenn sie sich im Ausziehen von 4 und 5theiligen Cubikwurzeln üben.

§. 7.

Cubikwurzeln aus gemeinen Brüchen.

Um aus einem gemeinen Bruche die Cubikwurzel zu finden, muß dieselbe sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner gezogen werden. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5},$$ und allgemein ist

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$ Da aber, wie dieses in dem vorigen Buche von den Quadratzahlen erwiesen worden ist, viele Zahlen keine genaue Würfel sind, so kann man hier entweder den Zähler oder den Nenner in einen vollkom-

menen Cubus verwandeln. Z. B: $\sqrt[3]{\frac{7}{9}} =$

$$\sqrt[3]{\frac{7 \times 7 \times 7}{9 \times 7 \times 7}} = \frac{\sqrt[3]{7 \times 7 \times 7}}{\sqrt[3]{9 \times 7 \times 7}} = \frac{7}{\sqrt[3]{9 \times 7 \times 7}},$$

wo man nur noch aus dem Nenner die Cubikwurzel zu finden hat. Man könnte auch sagen

$$\sqrt[3]{\frac{7}{9}} = \sqrt[3]{\frac{7 \times 9 \times 9}{9 \times 9 \times 9}} = \frac{\sqrt[3]{7 \times 9 \times 9}}{9},$$ wo

denn nunmehr aus dem Zähler die Cubikwurzel zu suchen wäre.

§. 8.

Irrationalzahlen durch Auszziehung der Cubikwurzeln.

Wenn man sich die Reihe der Zahlen von 1 — 9, nebst ihren Würfeln denkt, nämlich:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

und zwischen irgend zwey auf einander folgenden Würfelzahlen, z. B. zwischen 27 und 64 irgend eine Mittelzahl 30 annimmt und nun

$\sqrt[3]{30}$ bestimmen will, so ist klar, daß diese Wurzel größer als 3 und kleiner als 4 seyn müsse. Soll also dieselbe genau zu finden seyn, so muß sie 3 Ganze nebst dem noch unbekannten ächten Bruche $\frac{n}{m}$ betragen. Die Wurzel wäre demnach $3 + \frac{n}{m}$. Da aber in dem Würfel dieser 2theiligen Wurzel auch der Würfel des zweyten Theils d. h. der Würfel von $\frac{n}{m}$ vorkömmt, welcher wiederum ein ächter Bruch seyn muß, so kann $\left(3 + \frac{n}{m}\right)^3$ nie die ganze Zahl 30 hervorbringen. Daher kann $\sqrt[3]{30}$ niemals ganz genau angegeben werden d. h. sie ist eine Irrationalzahl. Hieraus erkennt man, daß auch durch das Ausziehen der Cubikwurzeln vielfach Irrationalzahlen entstehen, deren Werthe man durch eine Annäherungsmethode immer genauer finden muß.

§. 9.

Ausziehung der Cubikwurzeln aus Irrationalzahlen.

Um aus gegebenen Irrationalzahlen die Cubikwurzeln zu finden, befolge man ähnliche Regeln, wie früher bey den Quadratzahlen. Ein Beyspiel wird dieses erläutern. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\frac{8000}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{8000}}{10}$; d. h. man findet hierdurch $\sqrt[3]{8}$ in Einern und in Zehntel. Setzte man aber $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\frac{8000000}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{8000000}}{100}$, so fände man $\sqrt[3]{8}$ in Ganzen, Zehntel und Hundertel. Die allgemeine Regel heißt daher: Man hänge an die gegebene Zahl so vielmal 3 Nullen, als auf wie viele Decimalbruchstellen die Cubikwurzel gefunden werden soll, und setze diese Rechnung so lange fort, bis die gefundenen Decimalbruchtheile, nach dem Zwecke der Rechnung, klein genug sind. Z. B.

$$\sqrt[3]{175\,|\,000\,|\,000\,|\,000} \quad \left(\begin{matrix} a\,b\,c\,d \\ 5{,}5\,9\,3 \end{matrix}\right.$$

$$a^3 = 125$$

$$3a^2 = 75 \mid 500$$
$$3a^2 b = 375$$

$$1250$$
$$3ab^2 = 375$$

$$8750$$
$$b^3 = 125$$

$$3(a+b)^2 = 9075 \mid 86250$$
$$3(a+b)^2 c = 81675$$

$$45750$$
$$3(a+b)c^2 = 13365$$

$$323850$$
$$c^3 = 729$$

$$3(a+b+c)^2 = 937443 \mid 3231210$$
$$3(a+b+c)^2 d = 2812329$$

$$4188810$$
$$3(a+b+c)d^2 = 15093$$

$$41737170$$
$$d^3 = 27$$

41737143 Rest.

Wollte man diese Rechnung fortsetzen, so würde man für die folgenden Wurzeltheile die Ziffer 4447 finden, so daß $\sqrt[3]{175} = 5,5934447\ldots$ wird. Auch ist die Probe darüber leicht anzustellen.

§. 10.

Cubikwurzeln aus gemeinen und Decimal-Brüchen.

I. Nach dem Obigen wird $\sqrt[3]{\frac{8}{11}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{11}} = \frac{2}{2,2239801}$; ferner $\sqrt[3]{\frac{112}{349}} = \frac{\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{349}} = \frac{4,8202845}{7,0405800}$.

II. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{2 \times 2 \times 2}}{\sqrt[3]{3 \times 2 \times 2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{12}} = \frac{2}{2,2894286}$; ferner $\sqrt[3]{\frac{7}{11}} = \frac{\sqrt[3]{7 \times 7 \times 7}}{\sqrt[3]{11 \times 7 \times 7}} = \frac{7}{\sqrt[3]{539}} = \frac{7}{8,1382230}$ u. s. w.

III. $\sqrt[3]{\frac{6}{13}} = \frac{\sqrt[3]{6 \times 13 \times 13}}{\sqrt[3]{13 \times 13 \times 13}} = \frac{\sqrt[3]{1014}}{13}$;

oder $\sqrt[3]{\frac{12}{19}} = \frac{\sqrt[3]{12 \times 19 \times 19}}{\sqrt[3]{19 \times 19 \times 19}} = \frac{\sqrt[3]{4332}}{19}$

u. s. w.

IV. Um aus gegebenen Decimalbrüchen die Cubikwurzeln zu finden, muß man darauf sehen, ob die Zahl der Decimalbruchstellen drey oder ein Mehrfaches von drey, also 6, 9, 12 u. s. w. sey, oder nicht. Im ersten Falle theile man die Zahl so ab, wie bey ganzen Zahlen; im letztern aber muß man sie durch das Anhängen von einer oder von zwey Nullen nach den Classen gehörig ergänzen. So ist z. B. $\sqrt[3]{0,175} = 0,55934447\ldots$; $\sqrt[3]{0,35} = 0,32710663$; $\sqrt[3]{0,985} = 0,99497469$ u. s. w.

V. Auch kann man die Cubikwurzeln aus gemeinen Brüchen dadurch finden, daß diese zuerst in Decimalbrüche verwandelt, und aus letztern sodann die Cubikwurzeln gefunden werden. Mehrfache Uebungen sind den Anfängern sehr zu empfehlen.

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Die Zahlen- und Raum-Lehre für die Realschulen des Herzogthums Nassau

Bd.: 1. Die Zahlenlehre. - 1821. - XVI, 408 S.

Wiesbaden 1821

Math.p. 224 t-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082056-7